DEVOIR MAISON N° 5 TERMINALE S 1 Décembre 2008

EXERCICE 1

A. On considère la courbe C représentative de la fonction exponentielle et le point M de C d'abscisse $m \in \mathbb{R}$.
1. A l'aide de GeoGebra, construire la tangente à C au point M et construire le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
2. a) En déplaçant le point M sur la courbe C, observer la distance MH et conjecturer un résultat.
b) Démontrer ce résultat.

B. On considère la courbe C' représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x}$ où a est un réel non nul. Le point P est le point de C' d'abscisse p.
1. A l'aide de GeoGebra, construire la tangente à C' au point P et construire le point H projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses.
2. a) En déplaçant le point P sur la courbe C, observer la distance PH et émettre une conjecture.
b) Démontrer ce résultat.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x e^x}{e^x - 1}$ si x 0 et $f(0) = 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.
b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que la fonction f est continue en 0.
4. Démontrer que, pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.
5. Calculer la dérivée de la fonction f et déterminer la fonction g telle que $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
7. Soit a un réel non nul et les points M et M' , d'abscisses respectives a et $-a$, situés sur la courbe C représentative de la fonction f.
a) Établir que, pour tout réel x non nul, $f(-x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.
b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').