EXERCICE 1

A. On considère la courbe C représentative de la fonction exponentielle et le point M de C d'abscisse $m \in \mathbb{R}$.

1. A l'aide de GeoGebra, construire la tangente à C au point M, puis le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point A intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

2. a) En déplaçant le point M sur la courbe C, on observe que la distance AH est constante égale à 1.

b) Pour démontrer ce résultat, on détermine les coordonnées des points A et H.

L'équation de la tangente à C en M d'abscisse m est $y = e^m(x - m) + e^m = xe^m + e^m (1 - m)$.

Le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, a pour coordonnées H(m; 0).

Le point A intersection de la tangente avec l'axe des abscisses a une abscisse vérifiant l'équation $0 = xe^m + e^m (1 - m)$, soit $xe^m = e^m (m - 1)$, soit $x = m - 1$. D'où A($m - 1$; 0).

D'où la distance AH = $\sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = |m - (m - 1)| = 1$. CQFD.

B. On considère la courbe C' représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x}$ où a est un réel non nul. Le point P est le point de C' d'abscisse p.

1. A l'aide de GeoGebra, construire la tangente à C' au point P, puis le point H projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses et le point A intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

2. a) En déplaçant le point P sur la courbe C, on observe que la distance AH = $\frac{1}{2}$.

b) Pour démontrer ce résultat, on détermine les coordonnées des points A et H.

La dérivée de la fonction f est $f'(x) = 2ae^{2x}$.

L'équation de la tangente à C' en P d'abscisse p est $y = 2ae^{2p}(x - p) + ae^{2p} = 2axe^{2p} + ae^{2p} (1 - 2p)$.

Le point H projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses, a pour coordonnées H(p; 0).

Le point A intersection de la tangente avec l'axe des abscisses a une abscisse vérifiant l'équation

$0 = 2axe^{2p} + ae^{2p} (1 - 2p)$, soit $2axe^{2p} = ae^{2p} (2p - 1)$, soit $x = \frac{2p-1}{2} = p - \frac{1}{2}$. D'où A($p - \frac{1}{2}$; 0).

D'où la distance AH = $\sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = |p - (p - \frac{1}{2})| = \frac{1}{2}$. CQFD.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ si x 0 et $f(0) = 1$.

1. On sait que $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ par somme et quotient de limites.

2. a) Pour tout réel x non nul, $x\left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = x\left(\frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1}\right) = \frac{xe^x}{e^x - 1} = f(x)$.

b) On sait que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, par somme et produit de limites.

3. Pour montrer que la fonction f est continue en 0, on détermine $\lim_{x \to 0} f(x)$:

on sait que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} e^x = 1$, et on peut écrire $f(x) = \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}}$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$; donc la fonction f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

4. Pour démontrer que, pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$, on étudie la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - (x + 1)$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = e^x - 1$.

La fonction exponentielle s'annule en 0 et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $h'(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$ et $h'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$. Donc la fonction h est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 0$ qui vaut $h(0) = 0$; ainsi la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

5. La fonction f es dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont.

Et $f'(x) = \frac{(1+x)e^x(e^x - 1) - xe^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 + xe^x - x - xe^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$ où la fonction g est telle que $g(x) = h(x) = e^x - (x + 1)$. On a vu que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$, donc $g(x) \geqslant 0$, donc la dérivée de f est positive sur $\mathbb{R}^*$.

6. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	↗			$+\infty$

7. Soit a un réel non nul et les points M et M' , d'abscisses respectives a et $-a$, situés sur la courbe C représentative de la fonction f.

a) Pour tout réel x non nul, $f(-x) = \dfrac{-x e^{-x}}{e^{-x}-1} = \dfrac{-x}{e^{x}(e^{-x}-1)}$ $= \dfrac{-x}{1-e^{x}} = \dfrac{x}{e^{x}-1}$.

b) Le coefficient directeur de la droite (MM') est égal à

$\dfrac{y_M - y_M{}'}{x_M - x_M{}'} = \dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \dfrac{\dfrac{ae^{a}}{e^{a}-1} - \dfrac{a}{e^{a}-1}}{2a} = \dfrac{\dfrac{a(e^{a}-1)}{e^{a}-1}}{2a} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$. Ce coefficient directeur est fixe.