EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-6}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a) Déterminer des réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C.

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 2 (4 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction f .

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{1}{n+1}}{2-u_n}$.

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 , u_2 , u_3 , u_4 .
2. Conjecturer l'écriture de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

EXERCICE 4 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.