Lycée F. MISTRAL 6 décembre 2008 AVIGNON

Épreuve Commune de MATHEMATIQUES
Série S

CALCULATRICE AUTORISEE

DUREE : 4 heures

EXERCICE 1 — 7 points

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

Partie A : Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

- **a.** Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- **b.** En déduire que l'équation € possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Démontrer que α appartient à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
- **d.** Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

Partie B : Deuxième approche : construction d'une suite de réels ayant pour limite α

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

- **a)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
- **b)** En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
- **c)** Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $[0\ ;\ \alpha]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

- **a)** Démontrer par récurrence, à l'aide du **1. c)** que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- **b)** En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- **c)** Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
- **d)** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u4 arrondie à la sixième décimale.

EXERCICE 2 — 4 points

1. On considère le nombre complexe : $z = 1 + i$.

- **a)** Déterminer la forme algébrique de $\frac{z^2}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.
- **b)** Trouver le plus petit entier naturel n tel que z^n soit un réel positif.

2. On considère le nombre complexe : $z = x + iy$ où les les réels x et y ne sont pas tous les deux nuls.

- **a)** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z^2}{\overline{z}}$ en fonction de x et y.
- **b)** Déterminer les nombres complexes z tels que $\frac{z^2}{\overline{z}}$ soit un imaginaire pur.

EXERCICE 3	**5 points**

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I $=[0; \frac{\pi}{4}]$ par : $g(x) = \tan(x) - x$.

a) Étudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
b) Montrer que, pour tout x de I, on a : $0 \leq \tan(x) \leq 1$.
c) On considère la fonction h définie sur I par : $h(x) = \tan(x) - 2x$.
Montrer que la dérivée de h peut s'écrire : $h'(x) = \tan^2(x) - 1$.
Étudier les variations de h et en déduire son signe.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle I $= [0; \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.

a) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire : $f'(x) = (\tan(x) + 2x)(\tan(x) - 2x)$. En déduire le signe de f'.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et en déduire son signe.
c) Montrer que, pour tout x de I, on a : $x \leq \tan(x) \leq x - \frac{4x^3}{3}$.

3. Calculer les deux limites suivantes : **a)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\tan(x) - x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

EXERCICE 4	**4 points**

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1. a) à 3. d), sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.
Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1) a)	Pour tous les réels a et b : $\left(e^a\right)^b = e^{\left(a^b\right)}$
Affirmation 1) b)	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
Affirmation 1) c)	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I

Affirmation 2) a)	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a
Affirmation 2) b)	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a
Affirmation 2) c)	Si f est dérivable en a alors la fonction $h \hookrightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$

Affirmation 3) a)	Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ $v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0$
Affirmation 3) b)	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas
Affirmation 3) c)	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est strictement positive et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors la suite $\frac{u_n}{v_n}$ ne converge pas
Affirmation 3) d)	Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\frac{u_n}{v_n}$ converge.