CORRIGÉ DU DEVOIR COMMUN TERMINALES S Samedi 6 décembre 2008

Exercice 1 : Partie A :

1. x est solution de E si et seulement si $e^x = \frac{1}{x}$ si et seulement si $e^x - \frac{1}{x} = 0$ si et seulement si $\frac{xe^x - 1}{x} = 0$ si et seulement si $\frac{e^x\left(x - e^{-x}\right)}{x} = 0$ .Or quel que soit x, $e^x > 0$, donc $\frac{e^x\left(x - e^{-x}\right)}{x} = 0$ si et seulement si $\frac{x - e^{-x}}{x} = 0$.

De plus 0 n'est pas solution de E donc $\frac{x - e^{-x}}{x} = 0$ équivaut à $x - e^{-x} = 0$ équivaut à $f(x) = 0$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - (-1)e^{-x} = 1 + e^{-x}$. Quel que soit le réel x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il reste à voir dans quel intervalle elle prend ses valeurs . Il faut donc étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

On en conclut que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

En appliquant le théorème de la bijection : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ donc elle prend une seule fois toute valeur de $\mathbb{R}$. En particulier l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

c. on a $f(1/2) \simeq -0{,}11 < 0$ et $f(1) \simeq 0{,}63 > 0$ d'où la solution est dans l'intervalle $]1/2 \,;\, 1[$.

d. f est strictement croissante sur $\left[0;\alpha\right]$ donc quel que soit $x \in \left[0;\alpha\right]$, on a $f(0) < f(x) < f(\alpha)$ donc $f(x) \leqslant 0$.

Partie B : 1. a) Quel que soit x de $[0\,;1]$, $g(x) = x$ équivaut à $\frac{1+x}{1+e^x} = x$ équivaut à $1 + x = x(1 + e^x)$ équivaut à $1 + x = x + xe^x$ équivaut à $xe^x = 1$ équivaut à $e^x = \frac{1}{x}$. On multiplie par $1 + e^x$ qui n'est pas nul, et on divise par x qui ne peut être nul . On retrouve ainsi l'équation E qui est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.

Finalement l'équation $g(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.

b) Ces deux équations étant équivalentes, elles ont les mêmes solutions. Donc l'équation $g(x) = x$ a pour unique solution α . α est donc l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

c) La fonction g est dérivable sur $[0\,;1]$ comme quotient de sommes de fonctions dérivables sur $[0\,;1]$. Pour tout x de $[0\,;1]$ $g'(x) = \frac{1(1+e^x) - (1+x)e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{1 - xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

$g'(x)$ est du signe de $1 - xe^x = e^x\left(e^{-x} - x\right) = e^x\left[-f(x)\right]$ c'est-à-dire du signe opposé de celui de $f(x)$. On a vu que sur $\left[0;\alpha\right]$, $f(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$ donc la fonction g croissante.

a) On montre par récurrence que la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. » est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = g(0) = \frac{1}{2}$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

Hérédité : supposons que pour un certain rang n fixé on ait $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. La fonction g étant croissante sur $\left[0;\alpha\right]$, on en déduit $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$;

soit en tenant compte du fait que $g(\alpha) = \alpha$, $1/2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ d'où $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$. La propriété est alors vraie au rang $n + 1$. On en conclut que la propriété est vraie pour tout n entier naturel.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est croissante**.**

Pour tout entier naturel n, $u_n \leq \alpha$, donc la suite (u_n) est majorée par α . On en déduit qu'elle est croissante et majorée donc elle est convergente.

c) La suite (u_n) est définie par récurrence avec $u_{n+1} = g(u_n)$. Elle converge vers un réel l qui est dans l'intervalle $[0;\alpha]$. La fonction g est continue sur $[0 ;\alpha]$ donc elle est continue en l. On en déduit que l vérifie l'équation $l = g(l)$. Or, on a vu que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$. On en conclut que la suite converge vers α .

d) A l'aide de la calculatrice on obtient $u_4 \simeq 0{,}567143$.

<u>**Exercice 2 :**</u> **1. a)** $z = 1+i$ donc $\dfrac{z^2}{\overline{z}} = \dfrac{(1+i)^2}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i(1+i)}{2} = i-1 = -1+i$.

b) $z = 1+i$ donc $z^2 = 2i$ donc $z^4 = -4$ donc $z^8 = 16$

L'entier 8 est le plus petit tel que z^n soit un réel positif.

2) a) $z = x+iy$ donc $\dfrac{z^2}{\overline{z}} = \dfrac{(x+iy)^2}{(x-iy)} = \dfrac{(x+iy)^2(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \dfrac{(x^2-y^2+2ixy)(x+iy)}{x^2+y^2} =$

$\dfrac{x^3-xy^2-2xy^2+2ix^2y+ix^2y-iy^3}{x^2+y^2} = \dfrac{x^3-3xy^2+i(3x^2y+y^3)}{x^2+y^2}$. La partie réelle de $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ est donc $\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$

et sa partie imaginaire est $\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}$.

b) $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle soit $\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}=0$. Les réels x et y n'étant pas tous les deux nuls, le dénominateur x^2+y^2 est non nul. On a donc $\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} = 0$ équivaut à $x^3 - 3xy^2 = 0$ équivaut à $x(x^2 - 3y^2) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x^2 - 3y^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = y\sqrt{3}$ ou $x = -y\sqrt{3}$.

Les nombres complexes tels que $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ est un imaginaire pur sont tels que :

$x = 0$ soit les imaginaires purs.

$x = y\sqrt{3}$ soit les complexes de la forme $z = y\sqrt{3}+iy = y\left(\sqrt{3}+i\right)$ où y est un réel quelconque non nul.

$x = -y\sqrt{3}$ soit les complexes de la forme $z = -y\sqrt{3}+iy = y\left(-\sqrt{3}+i\right)$ où y est un réel quelconque non nul.

On peut aussi les écrire sous la forme $z = k\left(\sqrt{3}-i\right)$ où k est un réel quelconque non nul.

<u>**Exercice 3 :**</u> **1. a)** La fonction g est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et $g'(x) = 1+\tan^2(x)-1 = \tan^2(x)$. Cette dérivée est nulle en 0 et strictement positive partout ailleurs.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. Son minimum est donc $g(0) = 0$.

On en déduit que pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, $g(x) \geqslant 0$.

b) On sait que la fonction tangente est strictement croissante sur chaque intervalle de la forme $[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ donc en particulier sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ donc pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, on aura $\tan(0) \leqslant \tan(x) \leqslant \tan(\frac{\pi}{4})$, soit $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$.

c) Sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, la fonction h est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et $h'(x) = 1+\tan^2(x)-2 = \tan^2(x)-1$. Or, on a vu que sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$ d'où en élevant au carré cette inégalité entre réels positifs, on obtient $\tan^2(x) \leqslant 1$, d'où $h'(x) \leqslant 0$; donc la fonction h est strictement décroissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. Son maximum est donc $h(0) = 0$. Quel que soit x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, $h(x) \leqslant 0$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$comme somme de trois fonctions dérivables sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et

$f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 - \frac{4}{3}\times 3x^2 = \tan^2(x) - 4x^2 = (\tan(x) - 2x)(\tan(x) + 2x)$.

Or, pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a vu que $0 \leqslant \tan(x)$, donc $\tan(x) + 2x > 0$; d'après la question 1.c),

$h(x) = \tan(x) - 2x \leqslant 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$, donc la fonction f est décroissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Son maximum est donc $f(0) = 0$ d'où pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, $f(x) \leqslant 0$.

c) On a vu que pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, $g(x) = \tan(x) - x \geqslant 0$ soit $\tan(x) \geqslant x$ et $f(x) = \tan(x) - x - \frac{4}{3}x^3 \leqslant 0$ soit

$\tan(x) \leqslant x + \frac{4}{3}x^3$, d'où $x \leqslant \tan(x) \leqslant x + \frac{4}{3}x^3$.

a) En soustrayant x à chaque membre de l'inégalité précédente on obtient $0 \leqslant \tan(x) - x \leqslant \frac{4}{3}x^3$.

Pour x dans $]0; \frac{\pi}{4}]$et en divisant par x^2 non nul, il vient $0 \leqslant \frac{\tan(x)-x}{x^2} \leqslant \frac{4}{3}x$.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{4}{3}x = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\tan(x)-x}{x^2} = 0$.

b) $\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan(x)-\tan(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$ **.** On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction tangente entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. La fonction tangente étant dérivable sur son ensemble de définition et donc en particulier en $\frac{\pi}{4}$, ce taux d'accroissement a pour limite le nombre dérivé de la fonction tangente en $\frac{\pi}{4}$ soit $1 + \tan^2(\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 = 2$.

On a donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}} = 2$ **.**

<u>**Exercice 4 :**</u> **a) Faux :** pour tous réels a et b $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$.

b) Vrai ; c) Faux :la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 passe par l'origine ; c'est la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = x + 1$. De plus la courbe de la fonction exponentielle passe par le point d'abscisse 1 et d'ordonnée e. La tangente en ce point passe par ce point de coordonnées (1 ;e) ce qui n'est pas le cas de la droite d'équation $y = x + 1$.

2. a) Vrai ; b) Faux : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

c) Vrai : Si f dérivable en a alors $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est un nombre fini qui est par définition $f'(a)$.

3. a) Faux : on a dans ce cas une forme indéterminée et l'on peut avoir n'importe quel résultat.

b) Vrai : dans ce cas la suite $(u_n v_n)$ a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et donc ne converge pas.

c) Vrai : dans ce cas, le numérateur a une limite finie non nulle et le dénominateur a pour limite 0 donc le quotient admet une limite infinie donc la suite $\frac{u_n}{v_n}$ ne converge pas.

d) Faux : il peut se faire que (u_n) converge vers 2 par exemple et (v_n) vers 0 ; dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$ donc la suite $\frac{u_n}{v_n}$ ne converge pas.