Lycée F. MISTRAL			AVIGNON
BAC BLANC 2009	**Épreuve de MATHEMATIQUES**	**Série S**	

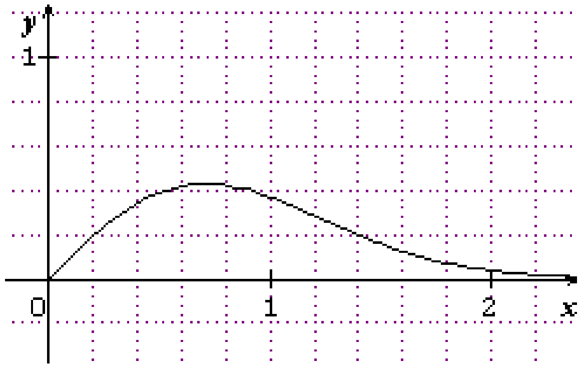
CALCULATRICE AUTORISEE **DUREE : 4 heures**

<u>EXERCICE N°1 (commun à tous les élèves)</u> (7 *points*)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x\, e^{-x^2}.$$

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$. On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

EXERCICE N°2 (Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité) (5 *points*)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3 - i$, $b = 1 - 3i$ et $c = -1 - i$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

b. En déduire une expression de n en fonction de m .

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe. Montrer que : $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ .

a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. Calculer $|q - 2 - i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE N°2 (Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité) (5 *points*)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 2cm.

Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : S(O) = A et S(A) = B.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + i$.

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc A_0 = O, A_1 = A et A_2 = B).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle ($\overrightarrow{\Omega A_n}$; $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$) .

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n. Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE N°3 (commun à tous les élèves) (4 *points*)

Dans un repère orthonormé de l'espace (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère les points : A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3) , C de coordonnées (0 ; – 2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; – 5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition l :

L'ensemble des points M de coordonnées (x ; y ; z) tels que : $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 :

La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que : est l'homothétie de $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ centre G, où G désigne le barycentre du système {(A ; 1), (B ; 1), (C ; 2)}, et de rapport 3.

Proposition 3 :

A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 :

La sphère de centre Ω de coordonnées (3 ; 3 ; 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation :

$$2x + 2y + z + 3 = 0.$$

<u>EXERCICE N°4 (commun à tous les élèves)</u> (4 *points*)

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$. *Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b. Quelle est son espérance ?

c. Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants : * D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
* A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

* « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
* « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(\text{A}) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.

b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.