

EXERCICE N°1 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x e^{-x^2}$.

Partie A : 1. a. Pour x différent de 0, on écrit : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$,

et en posant $X = x^2$, on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions qui le sont.

Et $f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x) e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$ qui est du signe de $1 - 2x^2$ puisque l'exponentielle est strictement positive. $1 - 2x^2$ s'annule pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce polynôme est positif sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

et négatif sur les autres intervalles. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et strictement

décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$. Donc f admet bien un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ce maximum est égal à $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

2. Comme la fonction f est positive sur $[0; a]$, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$ est égale à

$$\int_0^a f(x) dx = \left[\frac{-1}{2} e^{-x^2} \right]_0^a = \frac{-1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2}.$$

La limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$: On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, et en posant $X = x^2$, on trouve que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0; \text{ donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}.$$

Partie B : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1. a. La fonction f est strictement décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$, donc sur $[1; +\infty[$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 2$, et $x \in [n; n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. En utilisant les propriétés de l'intégrale, il vient

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx; \text{ de plus } \int_n^{n+1} f(n) dx = [x f(n)]_n^{n+1} = (n+1)f(n) - nf(n) = f(n); \text{ on obtient ainsi } f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

b. Le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$: On a donc pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n \leq f(n), \text{ donc } u_{n+1} \leq u_n \text{ et la suite est décroissante.}$$

c. La fonction f est strictement positive sur $[1; +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont, donc

$$\int_n^{n+1} f(x) dx > 0; \text{ ainsi la suite } (u_n) \text{ est minorée par } 0; \text{ elle est donc décroissante et minorée, donc elle}$$

converge. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a. Pour tout entier naturel strictement positif n , $\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx =$

$$\int_0^n f(x) dx \text{ par la relation de Chasles, d'où } \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = F(n).$$

b. On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

On peut conjecturer, d'après ce tableau de valeurs, que la suite $(F(n))$ est croissante et converge vers 0,5.

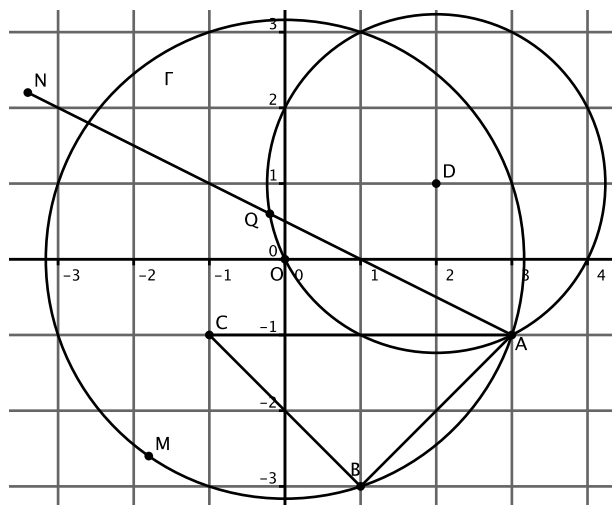
On sait déjà que $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}$ (question A. 2); donc la suite $(F(n))$ converge vers 0,5.

De plus, la fonction f est positive sur $[0; +\infty[$, donc $F(n) = F(n-1) + \int_{n-1}^n f(x)dx > F(n-1)$, ce qui signifie que la suite $(F(n))$ est croissante.

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3 - i$, $b = 1 - 3i$ et $c = -1 - i$

1. a. La figure ci-contre :



b. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B; pour le démontrer, on calcule les longueurs des côtés du triangle : $AB = |b - a| = |1 - 3i - (3 - i)| = |-2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $BC = |c - b| = |-1 - 3i - (1 - 3i)| = |-2| = 2$; $AC = |c - a| = |-1 - i - (3 - i)| = |-4| = 4$. On vérifie que $AB = BC$ et que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

c. Pour démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, on calcule les longueurs OA et OB : $OA = |a| = |3 - i| = \sqrt{10}$ et $OB = |b| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$. Donc ces deux points sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

2. a. L'écriture complexe de la rotation r de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est : $z' - m = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - m) = i(z - m)$.

b. Comme N est l'image de A par la rotation r , alors $n - m = i(a - m)$, soit $n = i(3 - i - m) + m = 1 + m + i(3 - m)$.

3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe. L'affixe du milieu du segment [AN] est

$$q = \frac{a+n}{2} = \frac{3-i+1+m+i(3-m)}{2} = \frac{4+2i+m(1-i)}{2} = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i.$$

4. a. Dans cette question, M est un point du cercle Γ . Donc $OM = \sqrt{10}$, donc la forme exponentielle de l'affixe de M est de la forme $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$ avec θ réel.

b. On a $|q - 2 - i| = \left| \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i - 2 - i \right| = \left| \frac{(1-i)\sqrt{10}e^{i\theta}}{2} \right| = \frac{|(1-i)\sqrt{10}e^{i\theta}|}{2} = \frac{|\sqrt{2} \times \sqrt{10}|}{2} = \sqrt{5}$.

Soit D le point d'affixe $2 + i$. Alors $DQ = |q - 2 - i| = \sqrt{5}$; Donc le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ est le cercle de centre D($2 + i$) et de rayon $\sqrt{5}$.

EXERCICE N°2 (spécialité) : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soient A et B les points d'affixes respectives : $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Les points O et A sont distincts ainsi que les points A et B, donc il existe une unique similitude directe S telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

2. Pour trouver l'écriture complexe de S , on cherche a et b tels que $z' = az + b$; comme $S(O) = A$, alors $i = b$; et comme $S(A) = B$, alors $1 + 2i = ai + b = ai + i$, soit $ai = 1 + i$, soit $a = 1 - i$, donc l'écriture complexe de S est bien $z' = (1 - i)z + i$.

Les éléments caractéristiques de S : l'affixe ω du centre de S vérifie $\omega = (1 - i)\omega + i$, soit $i\omega = i$, soit $\omega = 1$.

Le rapport de S est égal à $|1 - i| = \sqrt{2}$ et l'angle de S est égal à $\arg(1 - i) = \frac{-\pi}{4}$.

On considère la suite de points (A_n) telle que A_0 est l'origine du repère et, pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$. On note z_n , l'affixe de A_n . (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Pour démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$, on utilise un raisonnement par récurrence : Initialisation : pour $n = 0$: $z_0 = 1 - (1 - i)^0 = 1 - 1 = 0$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$;

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$, et montrons que $z_{n+1} = 1 - (1 - i)^{n+1}$: $z_{n+1} = (1 - i)z_n + i = (1 - i)(1 - (1 - i)^n) + i = (1 - i) - (1 - i)^{n+1} + i = 1 - (1 - i)^{n+1}$; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

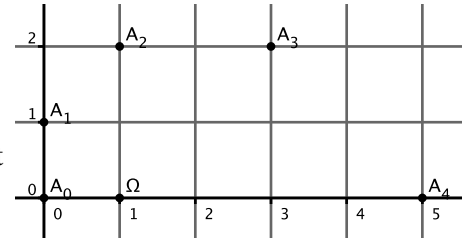
b. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A_n}$ est $z_n - 1 = -(1 - i)^n$, et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ est

$$z_{n+1} - z_n = 1 - (1 - i)^{n+1} - (1 - (1 - i)^n) = -(1 - i)^{n+1} + (1 - i)^n = (1 - i)^n (-(1 - i) + 1) = i(1 - i)^n.$$

Ainsi $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = |(1-i)^n| = (\sqrt{2})^n$ et $\|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\| = |i(1-i)^n| = |i| (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^n$.

Donc $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\| = \|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\|$. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-\omega}\right) = \arg\left(\frac{i(1-i)^n}{-(1-i)^n}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$.

c. Donc, pour construire le point A_{n+1} connaissant le point A_n , on trace le cercle de centre A_n et passant par Ω , puis la perpendiculaire à (ΩA_n) passant par A_n coupe le cercle en deux points dont l'un est A_{n+1} , celui tel que $(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \frac{-\pi}{2}$ ou plus simplement $(\overrightarrow{A_n \Omega}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) = \frac{\pi}{2}$. D'où la construction des points A_3 et A_4 ci-contre :



4. Les points de la suite (A_n) qui appartiennent à la droite (ΩB) sont ceux qui vérifient $(\overrightarrow{\Omega A_2}; \overrightarrow{\Omega A_n}) = 0 [\pi]$, car $A_2 = B$, soit l'axe de A_n est de la forme $1 + ki$ avec k réel, soit $z_n = 1 - (1-i)^n = 1 + ki$, soit $-(1-i)^n = ki$, soit $(1-i)^n = -ki$.

On sait que $(1-i)^2 = -2i$, donc pour tout entier naturel m ,

$(1-i)^{2m} = (-2i)^m$; si m est pair, $(1-i)^{2m}$ est réel, et si m est impair,

$(1-i)^{2m}$ est imaginaire pur. Donc, les points de la suite (A_n) qui appartiennent à la droite (ΩB) sont les points tels que $n = 4k + 2$ avec k réel, ou $n \equiv 2 (4)$.

EXERCICE 3 :

1. FAUX : Dans l'espace, l'écriture $y = 2x + 4$ ou $2x - y + 4 = 0$ est l'équation d'un plan parallèle à l'axe (Oz) . Une droite de l'espace est caractérisée par deux équations cartésiennes et non par une seule.

2. FAUX : G désigne le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 1), (C; 2)\}$ donc $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MG}$ équivaut à $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GG'} = 4\overrightarrow{MG}$ équivaut à $\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG}$ équivaut à $\overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$ qui signifie que M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -3 .

3. FAUX : A, B, C et D sont quatre points coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe trois réels a, b et c non tous nuls, tels que $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{AB} (1; -1; 3)$, $\overrightarrow{AC} (-1; -3; 5)$ et $\overrightarrow{AD} (0; -6; 5)$; soit $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ équivaut à

$$\begin{cases} a-b=0 \\ -a-3b-6c=0 \\ 3a+5b+5c=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a=b \\ -4a-6c=0 \\ 8a+5c=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a=b \\ a=\frac{-6}{4}c \\ a=\frac{-5}{8}c \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ ; car } \frac{-6}{4} \text{ étant différent de } \frac{-5}{8}$$

de $\frac{-5}{8}$, la seule possibilité pour que la 2^{ème} et la 3^{ème} égalité soient vérifiées est d'avoir $c = 0$. Mais cela implique alors que $a = b = c = 0$. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$4. \text{ VRAI : } d(\Omega; P) = \frac{|2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 \times 3 + 2 \times 3 + 0 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{|15|}{3} = 5.$$

EXERCICE N°4 : On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a. La loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est la loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$. En effet, il s'agit bien d'un schéma de Bernoulli : lancer trois fois de suite d'un dé de manière identique et indépendante,

avec une probabilité de succès $p(\text{« obtenir 6 »}) = \frac{1}{6}$.

b. L'espérance mathématique de X est le produit des paramètres de la loi binomiale, soit $\frac{1}{2}$.

c. $P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = 3 \frac{5}{216} = \frac{5}{72}$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les événements D et A suivants :

* D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;

* A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. On construit un arbre de probabilité :

La probabilité de l'événement : « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » est égale à

$$p(D \cap A) = p_D(A) \times p(D) = \frac{5}{72} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{144}.$$

La probabilité de l'événement : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 » est égale à

$$p(A \cap \bar{D}) = p_{\bar{D}}(A) p(\bar{D}) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{27} = \frac{1}{9}.$$

b. Par la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$p(A) = p(D \cap A) + p(A \cap \bar{D}) = \frac{5}{144} + \frac{1}{9} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}.$$

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6.

La probabilité d'avoir choisi le dé truqué est égale à $p_A(\bar{D}) = \frac{p(\bar{D} \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{7}{48}} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{21}$.

4. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a. On a la probabilité $p_n = 1 - p(\text{« n'obtenir aucun 6 »})$.

$$p(\text{« n'obtenir aucun 6 »}) = p(\bar{B}_n) = p(D \cap \bar{B}_n) + p(\bar{D} \cap \bar{B}_n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\text{Ainsi } p_n = 1 - p(\bar{B}_n) = 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right).$$

b. Le terme $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est le terme d'une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 , donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$; il en est de même pour $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$. Commentaire : lorsque n devient très grand, il est très probable d'obtenir au moins un 6.