Devoir maison n° 1 Terminale S spécialité Septembre 2008

Exercice 1

1. Ecrire les nombres 1^3 , 2^3 , 3^3 comme des différences de deux carrés.
2. Le nombre a est un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels m et p tels que $m + p = a^2$ et $m - p = a$.

b) En déduire a^3 en fonction de m et p.

3. Montrer que le cube de tout entier naturel peut s'écrire comme différence de deux carrés.
4. Ecrire alors 11^3 comme diférence de deux carrés.
5. Démontrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer des entiers naturels a, b, c et d tels que $\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3}$.

1. Montrer que la division euclidienne de 145 par 5 a pour reste d.
2. En déduire une nouvelle relation ne faisant intervenir que a, b et c.
3. Déterminer alors a, b, c et d .

Exercice 3

1. a) Déterminer les six plus petits carrés parfaits ayant 6 comme chiffre des unités.

b) Quelle conjecture peut-on faire sur leur chiffre des dizaines ?

c) Démontrer cette conjecture.

2. a) Déterminer le(s) chiffre(s) des dizaines des carrés des entiers ayant 5 comme chiffre des unités.

b) Expliquer pourquoi.

Exercice 3 (6 points)

On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pour tout élément a de A_7 , écrire dans le tableau ci-contre l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ (7).

Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5$ (7) équivaut à $x \equiv 4$ (7).

Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (7) sont les multiples de 7.

Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; ...; p-1\}$ de entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.

Soit a un élément de A_p .

Vérifier que a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (p).

On note r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p.

Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p tel que $ax \equiv 1$ (p).

Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0$ (p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1$ (31) et $3x \equiv 1$ (31).

A l'aide des résultats précédents, résoudre dans l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (31)