Exercice 1

1. On peut écrire les nombres $1^3 = 1^2 - 0^2$; $2^3 = 3^2 - 1^2$; $3^3 = 6^2 - 3^2$.

2. a) On cherche deux entiers naturels m et p tels que $\begin{cases} m+p=a^2 \\ m-p=a \end{cases}$. On additionne les deux équations, et on trouve $2m = a^2 + a$, soit $m = \frac{a^2+a}{2} = \frac{a(a+1)}{2}$. Ce nombre est un entier, car le produit de deux entiers consécutifs $a(a + 1)$ est un nombre pair, donc divisible par 2. On soustrait les deux équations, et on trouve $2p = a^2 - a$, soit $p = \frac{a^2-a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$. Ce nombre est aussi un entier pour les mêmes raisons..

b) Ainsi, $a^3 = a^2 \times a = (m + p)(m - p) = m^2 - p^2$.

3. On vient de montrer que, pour tout entier naturel a non nul, le cube de a peut s'écrire comme différence de deux carrés $m^2 - p^2$ avec $m = \frac{a(a+1)}{2}$ et $p = \frac{a(a-1)}{2}$. De plus, si $a = 0$, alors $0^3 = 1^2 - 1^2$. Ainsi, le cube de tout entier naturel peut s'écrire comme différence de deux carrés.

4. Ainsi si $a = 11$, $m = 66$ et $p = 55$, et $11^3 = 66^2 - 55^2$; vérification : $11^3 = 1331$; $66^2 - 55^2 = 4356 - 3025 = 1331$.

5. Soit a un entier naturel impair; il existe un entier naturel k tel que $a = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$. Donc tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés.

Exercice 2

1. On a $\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{d}{5^3} = \frac{5^3\times a+5^2\times b+5\times c+d}{5^3}$, soit $142 = 5^3\times a+5^2\times b+5\times c+d$ = $5(5^2\times a+5\times b+c)+d$ qui est l'écriture de la division euclidienne de 142 par 5 avec pour quotient $5^2\times a+5\times b+c$ et pour reste d.

2. Or $142 = 28\times5 + 2$, donc $d = 2$. On peut donc écrire $\frac{142}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{2}{5^3}$, soit $\frac{140}{5^3} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2}$, soit $\frac{28}{5^2} = a + \frac{b}{5} + \frac{c}{5^2}$.

3. On utilise le même procédé : c est le reste de la division euclidienne de 28 par 5, soit $28 = 5\times5 + 3$, donc $c = 3$. On peut donc écrire $\frac{28}{5^2} = a + \frac{b}{5} + \frac{3}{5^2}$, soit $\frac{25}{5^2} = a + \frac{b}{5}$, soit $1 = a + \frac{b}{5}$.
D'où $5 = 5a + b$ qui es tl'écriture de la division euclidienne de 5 par 5, donc $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 3

1. a) Les six plus petits carrés parfaits ayant 6 comme chiffre des unités sont 16, 36, 196, 256, 576, 676.

b) La conjecture que l'on peut faire sur leur chiffre des dizaines est qu'il est impair.

c) On s'aperçoit que les nombres dont le carré a comme chiffres des unités 6 sont les nombres dont le chiffre des unités est 4 ou 6. Effectivement, soit a un entier relatif.

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Ainsi, si a a pour chiffre des unités 4, $a = 10k + 4$, et $a^2 = 100k^2 + 80k + 16 = 100k^2 + 10\times8k + 16$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est le chiffre des unités de $8k + 1$ qui est impair.
De même, si a a pour chiffre des unités 6, $a = 10k + 6$, et $a^2 = 100k^2 + 120k + 36 = 100k^2 + 10\times12k + 36$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est le chiffre des unités de $12k + 3 = 2(6k + 1) + 1$ qui est impair.

2. Les seuls nombres dont le carré a pour chiffre des unités 5 sont les nombres dont le chiffre des unités est 5. Ainsi, si a a pour chiffre des unités 5, a peut s'écrire $a = 10k + 5$, et $a^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100(k^2 + k) + 25$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est 2. Donc le chiffre des dizaines des carrés des entiers ayant 5 comme chiffre des unités est 5.