Devoir maison n° 2 Terminale S spécialité Septembre 2008

Exercice 1

Partie A: Au troisième siècle avant J.C., dans son *Traité sur les dimensions du soleil et de la lune*, Aristarque remplace le rapport $\frac{71755875}{61735500}$ par $\frac{43}{37}$, sans calculatrice ! Voici une méthode pour résoudre ce problème:

1. Notons $a = 71755875$ et $b = 61735500$. Soient q_0 et r_0 le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

a) Démontrer que $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$ (1).

b) Ecrire la division euclidienne de b par r_0, et en déduire $\frac{b}{r_0}$, puis remplacer dans (1).

c) Réitérer le procédé.

2. Montrer que si on néglige le dernier rapport des restes, on obtient $\frac{a}{b} \simeq \frac{43}{37}$.

Partie B: Au troisième siècle avant J.C., Archimède a proposé l'encadrement $3 \leqslant \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{diamètre du cercle}} \leqslant \frac{6336}{2017+\frac{1}{4}}$.

En utilisant une méthode analogue à celle de la partie A, montrer comment Archimède a pu trouver $\frac{22}{7}$ comme approximation de $\frac{6336}{2017+\frac{1}{4}}$.

Exercice 2

On considère un entier naturel n non nul.

1. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
3. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
4. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{2008} par 7.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.
6. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} 3^k$.

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, u_n est divisible par 7 si et seulement si $3^n - 1$ est divisible par 7.

7. En déduire les valeurs de n pour lesquelles u_n est divisible par 7.