Corrigé Devoir maison n° 2 Terminale S spécialité Septembre 2008

Exercice 1

Partie A: 1. a = 71755875 et b = 61735500. Soient q_0 et r_0 le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

a) On sait que $a = bq_0 + r_0$, donc $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$, soit $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}}$ (1).

b) On sait que 71755875 = 61735500×1 + 10020375. Donc $q_0 = 1$ et $r_0 = 10020375$. La division euclidienne de b par r_0 donne 61735500 = 10020375×6 + 1613250. D'où $\frac{b}{r_0} = \frac{61735500}{10020375} = 6 + \frac{1613250}{10020375} = 6 + \frac{478}{2969}$.

On remplace dans (1) : $\frac{71755875}{61735500} = 1 + \frac{1}{6+\frac{478}{2969}}$.

c) On réitère le procédé : 2969 = 478×6 + 101, donc $\frac{2969}{478} = 6 + \frac{101}{478}$.

Donc $\frac{71755875}{61735500} = 1 + \frac{1}{6+\frac{478}{2969}} = 1 + \frac{1}{6+\frac{1}{\frac{2969}{478}}} = 1 + \frac{1}{6+\frac{1}{6+\frac{101}{478}}}$.

2. Si on néglige le dernier rapport des restes $\frac{101}{478}$, on obtient $\frac{a}{b} \simeq 1 + \frac{1}{6+\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{\frac{37}{6}} = 1 + \frac{6}{37} = \frac{43}{37}$.

Partie B: $\frac{6336}{2017+\frac{1}{4}} = \frac{6336\times4}{2017\times4+1} = \frac{25344}{8069} = 3 + \frac{1137}{8069} = 3 + \frac{1}{\frac{8069}{1137}} = 3 + \frac{1}{7+\frac{110}{1137}} \simeq 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Exercice 2 : On considère un entier naturel n non nul.

1. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calcul des restes de la division euclidienne de 3^n par 7 dans le tableau ci-contre :

n	1	2	3	4	5	6
Reste de 3^n par 7	3	2	6	4	5	1

2. Pour tout entier naturel n, $3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1)$. Comme le reste de la division euclidienne de 3^6 par 7 est 1, alors $3^6 - 1$ est divisible par 7, donc $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

3. Soit $3^{n+6} = 7q + r$ et $3^n = 7q' + r'$ les divisions euclidiennes de 3^{n+6} et 3^n par 7. Alors $3^{n+6} - 3^n = 7(q - q') + r - r'$ qui est divisible par 7, donc $r - r' = 0$ et $r = r'$. Donc 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

4. Pour tout entier naturel k, 3^{n+6k} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

En effet, $n + 6k = n + 6 + 6 + ... + 6$ (il y a k fois le chiffre 6), et on utilise la propriété de la question 3, k fois.

On sait que 2008 = 6×334 + 4, donc $3^{2008} = 3^{6\times334+4} = 3^{6\times334+4}$ a le même reste que 3^4 dans la division euclidienne par 7. Donc le reste de la division euclidienne de 3^{2008} par 7 est 4.

5. Tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des formes : $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$, avec k entier naturel. Le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est le reste de 3^i où $n = 6k + i$ avec $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est donné dans le tableau ci-contre:

n s'écrit	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
Reste de 3^n par 7	1	3	2	6	4	5

6. Pour $n \geqslant 2$, u_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1, donc $u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} 3^k = 1\,\frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}$.

On sait 3^n est un nombre impair, donc $3^n - 1$ est pair, donc divisible par 2.

Si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors $3^n - 1 = 2\times7k$, d'où $u_n = 7k$ est divisible par 7.

Réciproquement, si u_n est divisible par 7, alors $u_n = 7k$, donc $\frac{3^n-1}{2} = 7k$, soit $3^n - 1 = 7\times2k$, donc $3^n - 1$ est divisible par 7.

7. Ainsi, u_n est divisible par 7 si $3^n - 1$ est divisible par 7. Or, d'après la question 5, les seules valeurs de n pour lesquelles $3^n - 1$ est divisible par 7 sont $n = 6k$ avec k entier naturel non nul (puisque $n \geqslant 2$). Ce sont donc les multiples de 6.