Corrigé Devoir maison n° 3 Terminale S spécialité Octobre 2008

Exercice 1 : 1. Soit N un entier naturel et S la somme des chiffres de N.
Tout entier naturel N s'écrit $N = a_n \times 10^n + ... + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $n + 1$ est le nombre de chiffres de N. Comme $10 \equiv 1$ (9), alors pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1$ (9).
Donc $N \equiv a_n \times 10^n + ... + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + ... + a_2 + a_1 + a_0 \equiv S$ (9).
Donc N est divisible par 9 équivaut à $N \equiv 0$ (9) équivaut à $S \equiv 0$ (9) équivaut à S est divisible par 9.
2. On considère le nombre $A = 2009^{2009}$.
On désigne par B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C.
a) D'après la question précédente, $A \equiv B \equiv C \equiv D$ (9), donc $A \equiv D$ (9).
b) On a $2009 < 10000$, soit $2009 < 10^4$, donc $A < (10^4)^{2009} = 10^{8036}$ qui contient 8037 chiffres, et c'est le plus petit nombre de 8037 chiffres. Donc A a au plus 8036 chiffres.
Chaque chiffre de A est inférieure ou égale à 9, donc $B \leqslant 8036 \times 9$, soit $B \leqslant 72324$.
c) $B < 99999$, dont la somme des chiffres est 45, donc $C \leqslant 45$.
d) Parmi les nombres de 1 à 45, celui dont la somme des chiffres est maximale est 39; donc $D \leqslant 12$.
e) On cherche le reste de la division euclidienne de A par 9 : $2009 = 223 \times 9 + 2$, donc $2009 \equiv 2$ (9).
On cherche les restes de la division euclidienne des puissances de 2 par 9 : $2^2 = 4 \equiv 4$ (9); $2^3 = 8 \equiv 8$ (9);
$2^4 = 16 \equiv 7$ (9); $2^5 = 32 \equiv 5$ (9); $2^6 = 64 \equiv 1$ (9); ensuite, on retrouve les mêmes restes.
Ainsi $A = 2009^{2009} \equiv 2^{2009} \equiv 2^{6 \times 334 + 5} \equiv (2^6)^{334} \times 2^5 \equiv 1 \times 5 \equiv 5$ (9). Donc $D \equiv 5$ (9), et comme $D \leqslant 12$, alors $D = 5$.
Pour trouver C, on cherche les entiers naturels plus petit que 45 dont la somme des chiffres est égale à 5:
On trouve 5, 14, 23, 32, 41.

Exercice 2
1. On cherche les restes de la division euclidienne des puissances de 6 par 7 : $6 \equiv 6$ (7); $6^2 = 36 \equiv 1$ (7); $6^3 \equiv 6$ (7);
les restes sont alternativement 6 et 1 : Si n est pair, $6^n \equiv 1$ (7); Si n est impair, $6^n \equiv 6$ (7).
2. On a $2008 = 286 \times 7 + 6$, donc $2008 \equiv 6$ (7). Donc $2008^{2009} + 1 \equiv 6^{2009} + 1 \equiv 6 + 1 \equiv 7 \equiv 0$ (7).
Donc le nombre $2008^{2009} + 1$ est divisible par 7.

Exercice 3
1. On remarque que $10x \leqslant 113$, donc $x \leqslant 11$; $15y \leqslant 113$, donc $y \leqslant 7$; $6z \leqslant 113$, donc $z \leqslant 18$.
A l'aide du tableur, on résout dans $\mathbb{N}$ l'équation $10x + 15y + 6z = 113$ en testant toutes les valeurs entières possibles de x, y et z dans les intervalles définis plus haut.
On trouve
2. En utilisant des congruences :
Modulo 2 : $10x + 15y + 6z \equiv y$ (2) et $113 \equiv 1$ (2), donc $y \equiv 1$ (2), ce qui signifie que y est impair : $y \in \{1; 3; 5; 7\}$.
Modulo 3 : $10x + 15y + 6z \equiv x$ (3) et $113 \equiv 2$ (3), donc $x \equiv 2$ (3), donc $x \in \{2; 5; 8; 11\}$.
Modulo 5 : $10x + 15y + 6z \equiv z$ (5) et $113 \equiv 3$ (5), donc $z \equiv 3$ (5), donc $z \in \{3; 8; 13; 18\}$.
On trouve 6 triplets solutions : $\{(2; 1; 13), (2; 3; 8), (2; 5; 3), (5; 1; 8), (5; 3; 3), (8; 1; 3)\}$.