Exercice 1 : *Définition*: on appelle nombre parfait tout entier naturel n dont la somme des diviseurs est égale à $2n$.
1. Trouver tous les nombres parfaits inférieurs à 30.
2. Euclide a énoncé la règle suivante: « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ et si le facteur $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est un nombre parfait. »
Trouver trois autres nombres parfaits.
3. On considère le nombre $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et on suppose que le facteur $p = 2^{n+1} - 1$ est premier.
a) Quelle est la décomposition de a en produit de facteurs premiers ?
b) En déduire la liste des diviseurs de a.
c) Démontrer que la somme de ces diviseurs est $2a$.

Exercice 2 : Nombre de Mersenne :
On considère les nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$, pour n entier naturel non nul.
1. a) En utilisant un tableur, émettre une conjecture sur n pour que M_n soit un multiple de 3.
b) Démontrer la conjecture à l'aide des congruences.
2. a) Émettre une conjecture sur n pour que M_n soit un multiple de 3.
b) Démontrer la conjecture à l'aide des congruences.
3. a) Émettre une conjecture sur n pour que M_n soit un nombre premier.
b) Le nombre M_{11} est-il premier ?
c) On suppose que $n = pq$ avec p et q supérieurs ou égaux à 2. Trouver une factorisation de M_n.
d) En déduire que si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?
4. On considère les nombres $F_d(x; y) = x^2 + dy^2$ avec d, x et y des entiers naturels.
a) En utilisant les congruences de M_n et $F_1(x; y)$ modulo 4, préciser s'il existe des nombres de Mersenne qui sont la somme de deux carrés d'entiers naturels.
b) Déterminer un entier naturel n et des entiers naturels x et y tels que $M_n = F_2(x; y)$.