Corrigé Devoir maison n° 4 Terminale S spécialité *Novembre 2008*

Exercice 1 : *Définition*: on appelle nombre parfait tout entier naturel n dont la somme des diviseurs est égale à $2n$.
1. Les seuls nombres parfaits inférieurs à 30 sont 6 et 28; les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6; la somme est égale à 12. Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14, 28; la somme est égale à 56.

2. Euclide a énoncé la règle suivante: « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ et si le facteur $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est un nombre parfait. »
Trois autres nombres parfaits : par exemple, $n = 4$, $2^{n+1} - 1 = 31$ est premier, et $a = 496$; $n = 6$, $2^{n+1} - 1 = 127$ est premier, et $a = 8128$; $n = 16$, $2^{n+1} - 1 = 131071$ est premier, et $a = 8589869056$.
3. On considère le nombre $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et on suppose que le facteur $p = 2^{n+1} - 1$ est premier.
a) La décomposition de a en produit de facteurs premiers est $2^n \times p$.
b) Les diviseurs de a sont 1, 2, 2^2, …, 2^n , p, $2\times p$, $2^2\times p$, …, $2^n \times p$.
c) La somme de ces diviseurs est égale à $1+ 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p + 2\times p + 2^2\times p + \ldots + 2^n \times p =$
$(1 + p)(1+ 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) = (1 + p) \sum_{k=0}^{k=n} 2^k = (1 + p) \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = (1 + p)(2^{n+1} - 1) = 2^{n+1} (2^{n+1} - 1) =$
$2\times 2^n(2^{n+1} - 1) = 2a$.

Exercice 2 : On considère les nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$, pour n entier naturel non nul.
1. a) Conjecture : M_n est un multiple de 3 si et seulement si n est pair.
b) Démonstration de la conjecture : si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $M_n = 2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0\ (3)$;
si n est impair, $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $M_n = 2^n - 1 = 2^{2k+1} - 1 = 4^k\times 2 - 1 \equiv 1\times 2 - 1 \equiv 1\ (3)$; donc n'est pas divisible par 3.

2. a) Conjecture : M_n est un multiple de 5 si et seulement si n est un multiple de 4.
b) Démonstration de la conjecture : si n est un multiple de 4, $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $M_n = 2^n - 1 = 2^{4k} - 1 = 16^k - 1$
$\equiv 1^k - 1 \equiv 0\ (5)$;
si n n'est pas un multiple de 4, $n = 4k + i$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1$, 2 ou 3; $M_n = 2^n - 1 = 2^{4k+i} - 1 = 16^k\times 2^i - 1$
$\equiv 1\times 2^i - 1 \equiv 1$, 3, ou 2 (5); donc n'est pas divisible par 5.

3. a) Conjecture : Pour que M_n soit un nombre premier, il faut que n soit premier.
b) $M_{11} = 2047 = 23\times 89$ n'est pas premier.
c) On sait que, pour tout réel x et tout entier naturel m, $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$.
On suppose que $n = pq$ avec p et q supérieurs ou égaux à 2.
Alors $M_n = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \ldots + 2^p + 1)$ qui est divisible par $2^p - 1 \neq 1$ car $p \geqslant 2$.
Donc M_n n'est pas premier.
d) La contraposée de la propriété précédente est : si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est : « Si n est premier, alors M_n est premier » est fausse puisque M_{11} n'est pas premier.

4. On considère les nombres $F_d(x; y) = x^2 + dy^2$ avec d, x et y des entiers naturels.
a) On a $F_1(x; y) = x^2 + y^2$. Le carré d'un entier est congru à 0 ou 1 modulo 4, donc la somme de deux carrés est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4. Or, M_n est congru à 1 modulo 4 si $n = 1$ et à 3 si $n > 1$; donc seul M_1 peut s'écrire comme la somme de deux carrés; mais $M_1 = 1$ n'est pas un nombre premier, donc il n'existe pas de nombres de Mersenne qui sont la somme de deux carrés d'entiers naturels.

b) On a $F_2(x; y) = x^2 + 2y^2$. On veut trouver un entier naturel n et des entiers naturels x et y tels que $M_n = F_2(x; y)$,
soit $2^n - 1 = x^2 + 2y^2$, ou $2^n - 2y^2 = x^2 + 1$, soit $2(2^{n-1} - y^2) = x^2 + 1$. Donc $x^2 + 1$ est pair, donc x est impair.
On trouve $x = y = 1$ et $n = 2$: $M_2 = 3 = F_2(1; 1)$.