Devoir maison n° 5 | Terminale S spécialité | *Décembre 2008*

Exercice 1 : On considère deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - 2b^2 = 1$ (1).
1. Démontrer les propriétés suivantes :
a) Les nombres a et b sont premiers entre eux;
b) a est impair;
c) b est pair;
2. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, trouver quatre couples (a; b)d'entiers naturels inférieurs à 100 vérifiant (1).
3. Montrer que si le couple (a; b) est solution de (1), alors le couple (A; B) où A = $3a + 4b$ et B = $2a + 3b$ est aussi solution.
4. En déduire un couple d'entiers supérieurs à 1000 solution de (1).

Exercice 2 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$, alors $n^a - 1 > n^b - 1$.
2. Montrer que $n^8 - 1 = n^3(n^5 - 1) + n^3 - 1$ est la division euclidienne de $n^8 - 1$ par $n^5 - 1$.
3. Écrire l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer le PGCD($n^8 - 1$; $n^5 - 1$).
4. Comparer avec le PGCD de 8 et 5.
5. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$, $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b et d = PGCD(a; b).
a) Déterminer l'entier N tel que la division euclidienne de $n^a - 1$ par $n^b - 1$ s'écrive $n^a - 1 = \text{N}(n^b - 1) + n^r - 1$.
b) Déterminer le PGCD de $n^a - 1$ et $n^b - 1$ en fonction de n et de d.

Devoir maison n° 5 | Terminale S spécialité | *Décembre 2008*

Exercice 1 : On considère deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - 2b^2 = 1$ (1).
1. Démontrer les propriétés suivantes :
a) Les nombres a et b sont premiers entre eux;
b) a est impair;
c) b est pair;
2. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, trouver quatre couples (a; b)d'entiers naturels inférieurs à 100 vérifiant (1).
3. Montrer que si le couple (a; b) est solution de (1), alors le couple (A; B) où A = $3a + 4b$ et B = $2a + 3b$ est aussi solution.
4. En déduire un couple d'entiers supérieurs à 1000 solution de (1).

Exercice 2 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$, alors $n^a - 1 > n^b - 1$.
2. Montrer que $n^8 - 1 = n^3(n^5 - 1) + n^3 - 1$ est la division euclidienne de $n^8 - 1$ par $n^5 - 1$.
3. Écrire l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer le PGCD($n^8 - 1$; $n^5 - 1$).
4. Comparer avec le PGCD de 8 et 5.
5. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$, $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b et d = PGCD(a; b).
a) Déterminer l'entier N tel que la division euclidienne de $n^a - 1$ par $n^b - 1$ s'écrive $n^a - 1 = \text{N}(n^b - 1) + n^r - 1$.
b) Déterminer le PGCD de $n^a - 1$ et $n^b - 1$ en fonction de n et de d.