Exercice 1 : On considère deux entiers naturels a et b tels que $a^2 - 2b^2 = 1$ (1).

1. a) On peut écrire (1) sous la forme $au + bv = 1$ avec $u = a$ et $v = -2b$; u et v sont des entiers relatifs; donc d'après le théorème de Bezout, les nombres a et b sont premiers entre eux;

b) a est impair : $a^2 = 2b^2 + 1$ de la forme $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$; donc a^2 est impair, soit a est impair.

c) b est pair : $2b^2 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$; $a + 1$ et $a - 1$ sont pairs car a est impair, donc $(a-1)(a+1) = 4k'$, soit $2b^2 = 4k'$, soit $b^2 = 2k'$, donc b^2 est pair, soit b est pair.

2. A l'aide d'un tableur, on trouve quatre couples (a; b) d'entiers naturels inférieurs à 100 vérifiant (1) :
(1; 0); (3; 2); (17; 12); (99; 70).

3. Si le couple (a; b) est solution de (1), alors $a^2 - 2b^2 = 1$; et
$A^2 - 2B^2 = (3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2 - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) = a^2 - 2b^2 = 1$. Donc le couple (A; B) est aussi solution de (1).

4. On en déduit un couple d'entiers supérieurs à 1000 solution de (1) : on prend $a = 99$ et $b = 70$,
alors $A = 3\times99 + 4\times70 = 577$ et $B = 2\times99 + 3\times70 = 408$ est un couple solution;
puis $A = 3\times577 + 4\times408 = 3363$ et $B = 2\times577 + 3\times408 = 2378$ est un couple solution. Vérification :
$3363^2 - 2\times2378^2 = 1$.

Exercice 2 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$, alors $a\ln(n) > b\ln(n)$, alors $\ln(n^a) > \ln(n^b)$, alors $n^a > n^b$ et alors $n^a - 1 > n^b - 1$.

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et d'après la question précédente, $0 \leqslant n^3 - 1 < n^5 - 1$,
donc $n^8 - 1 = n^3(n^5 - 1) + n^3 - 1$ est la division euclidienne de $n^8 - 1$ par $n^5 - 1$.

3. L'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD($n^8 - 1$; $n^5 - 1$) :
$n^8 - 1 = n^3(n^5 - 1) + n^3 - 1$ et $0 \leqslant n^3 - 1 < n^5 - 1$,
$n^5 - 1 = n^2(n^3 - 1) + n^2 - 1$ et $0 \leqslant n^2 - 1 < n^3 - 1$,
$n^3 - 1 = n(n^2 - 1) + n - 1$ et $0 \leqslant n^2 - 1 < n - 1$,
$n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1 = (n+1)(n-1)$ de reste nul. Le dernier reste non nul est $n - 1$,
donc PGCD($n^8 - 1$; $n^5 - 1$) = $n - 1$.

4. Le PGCD de 8 et 5 est 1. Comme $n \geqslant 2$, alors PGCD($n^8 - 1$; $n^5 - 1$) $\geqslant$ PGCD(8; 5).

5. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$, $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b et d = PGCD(a; b).

a) La division euclidienne de $n^a - 1$ par $n^b - 1$ est $n^a - 1 = (n^{b(q-1)+r} + n^{b(q-2)+r} + \ldots + n^r)(n^b - 1) + n^r - 1$,
d'où $N = n^{b(q-1)+r} + n^{b(q-2)+r} + \ldots + n^r$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide pour a et b :
$a = bq + r$, et $0 \leqslant r < b$,
$b = rq_1 + r_1$, et $0 \leqslant r_1 < r$,
$r = r_1 q_2 + r_2$, et $0 \leqslant r_2 < r_1$, …
$r_{m-1} = r_m q_{m+1} + r_{m+1}$, et $r_{m+1} = 0$, le dernier reste non nul $r_m = d$;

on trouve alors :
$n^a - 1 = (n^{b(q-1)+r} + n^{b(q-2)+r} + \ldots + n^r)(n^b - 1) + n^r - 1$, et $0 \leqslant n^r - 1 < n^b - 1$,
$n^b - 1 = N_1(n^r - 1) + n^{r_1} - 1$, et $0 \leqslant n^{r_1} - 1 < n^r - 1$,
$n^r - 1 = N_2(n^{r_1} - 1) + n^{r_2} - 1$, et $0 \leqslant n^{r_2} - 1 < n^{r_1} - 1$, ...

$n^{r_{m-1}} - 1 = N_m(n^{r_m} - 1) + n^{r_{m+1}} - 1$, et $n^{r_{m+1}} - 1 = 1 - 1 = 0$, donc le dernier reste non nul est $n^{r_m} - 1 = n^d - 1$.
Donc PGCD($n^a - 1$; $n^b - 1$) = $n^d - 1$.