Devoir maison n° 6 Terminale S spécialité *janvier 2009*

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point M_n ($\cos\alpha_n$, $\sin\alpha_n$) avec $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5n\pi}{6}$.

1. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p; montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est un multiple de 12.
2. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Résoudre l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

Exercice 2

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
a) Pour tout élément a de A_7 , déterminer l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ (7).
b) Pour x entier relatif, déterminer a de A_7 tel que l'équation $3x \equiv 5$ (7) équivaut à $x \equiv a$ (7).
c) Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (7) sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; ...; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.
Soit a un élément de A_p .
a) Vérifier que a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (p).
b) On note r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p.
Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p tel que $ax \equiv 1$ (p).
c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0$ (p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .
3. a) Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1$ (31) et $3x \equiv 1$ (31).
b) A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (31).

Exercice 3

1. Montrer que le nombre n = 1105 est le produit de trois nombres premiers distincts p, q et r tels que $p-1$, $q-1$ et $r-1$ divisent $n-1$.
2. En déduire que pour tout entier naturel a premier avec n, on a $a^{n-1} \equiv 1$ (n).
3. La réciproque du petit théorème de Fermat est-elle vraie ? Justifier.