Corrigé Devoir maison n° 6 Terminale S spécialité

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point M_n ($\cos \alpha_n$, $\sin \alpha_n$) avec $\alpha_n = \frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}$.

1. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p; deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $\alpha_n = \alpha_p$ $[2\pi]$ si et seulement si $\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}$ $[2\pi]$ si et seulement si $\frac{5n\pi}{6} = \frac{5p\pi}{6}$ $[2\pi]$ si et seulement si $5n\pi = 5p\pi$ $[12\pi]$ si et seulement si $5n = 5p$ [12] si et seulement si $5(n - p)$ divisible par 12, et par le théorème de Gauss(5 et 12 sont premiers entre eux), si et seulement si $(n - p)$ est un multiple de 12.

2. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.

On cherche une solution particulière de l'équation l'équation $12x - 5y = 1$:

$12 = 5\times2 + 2$; $5 = 2\times2 + 1$; on remonte : $1 = 5 - 2\times2 = 5 - 2(12 - 5\times2) = - 2\times12 - 5\times(- 3)$? Donc un solution particulière de l'équation $12x - 5y = 1$ est $(- 2; - 3)$; donc une solution particulière de l'équation (E) est $(- 6; - 9)$. Soit $(x; y)$ une solution de (E) : par soustraction, on obtient $12(x + 6) - 5(y + 9) = 0$,
soit $12(x + 6) = 5(y + 9)$. Par le théorème de Gauss, comme 5 et 12 sont premiers entre eux, 5 divise $x + 6$, donc il existe un entier k tel que $x + 6 = 5k$, soit $x = 5k - 6$. En remplaçant $x + 6$ par $5k$ dans $12(x + 6) = 5(y + 9)$, il vient $y + 9 = 12k$, soit $y = 12k - 9$. Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(5k - 6; 12k - 9)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On vérifie que ces couples sont bien solutions : $12(5k - 6) - 5(12k - 9) = 60k - 72 - 60k + 75 = 3$.

3. M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$ si et seulement si $\alpha_n = 0$ $[2\pi]$, soit $\alpha_n = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,
donc si $\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6} = 2k\pi$ soit $3\pi + 5n\pi = 12k\pi$, soit $12k - 5n = 3$; les solutions sont celles trouvées à la question 2, soit $n = 12k' - 9$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$ est $S = \{12k' - 9$ avec $k' \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Pour tout élément a de A_7 , l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ (7) :

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b) Pour x entier relatif, l'équation $3x \equiv 5$ (7) équivaut à $3\times5x \equiv 5\times5$ (7) équivaut à $x \equiv 25 \equiv 4$ (7), donc $a = 4$.

c) Si a est un élément de A_7 , a et 7 sont premiers entre eux, donc $ax \equiv 0$ (7) signifie que ax est divisible par 7, par le théorème de Gauss, x est divisible par 7; donc les solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (7) sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; ...; p - 1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.

Soit a un élément de A_p .

a) Si a un élément de A_p et p premier, alors a et p sont premiers entre eux. Par le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1$ (p). Donc $a^{p-2}\times a \equiv 1$ (p) ce qui prouve que a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (p).

b) Si r est le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p, alors $a^{p-2} = pq + r$ et $0 \leqslant r < p$. Or r n'est pas nul, car a^{p-2} n'est pas divisible par p. Donc r est un élément de A_p . On a $ar = a(a^{p-2} - pq) = a^{p-1} - apq \equiv 1$ (p), donc r est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (p). Unicité : supposons qu'il existe $r' \in A_p$ solution de l'équation $ax \equiv 1$ (p). Alors, par différence $a(r' - r) \equiv 0$ (p). Par le théorème de Gauss, $r' - r$ est divisible par p.

Or $r' - r \in \{ - p + 1; - p + 2; \ldots; 0 ; 1; 2; \ldots. p - 1\}$. Le seul entier divisible par p dans cet ensemble est 0. Donc $r' = r$ et r est l'unique solution x dans A_p tel que $ax \equiv 1$ (p).

c) Si x est un multiple de p ou y est un multiple de p, alors $xy \equiv 0$ (p).

Réciproque : en utilisant la contraposée : si x et y ne sont pas divisibles par p alors $x \equiv r$ (p) et $y \equiv r'$ (p) avec r et $r' \in A_p$; alors $xy \equiv rr' \equiv r''$ (p) avec $r'' \in A_p$; donc xy n'est pas congru à 0 modulo p.

3. a) Résolution dans A_{31} des équations : le reste de la division euclidienne de $2^{31-2} = 2^{29}$ par 31 est 16, donc $2x \equiv 1$ (31) équivaut à $x \equiv 16$ (31) ; le reste de la division euclidienne de $3^{31-2} = 3^{29}$ par 31 est 21, donc $3x \equiv 1$ (31) équivaut à $x \equiv 21$ (31).

b) On factorise $6x^2 - 5x + 1 = (3x - 1)(2x - 1)$. D'après la question 2. c), l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (31) est équivalente à $2x - 1 \equiv 0$ (31) ou $3x - 1 \equiv 0$ (31). D'après la question précédente, les solutions sont $\{x = 31k + 16$ ou $x = 31k + 21$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3

1. En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, on trouve $n = 1105 = 5\times 13\times 17$;
et $5 - 1 = 4$ divise 1104, $13 - 1 = 12$ divise 1104, $17 - 1 = 16$ divise 1104.

2. Pour tout entier naturel a premier avec n, d'après le théorème de Bezout, il existe des entiers u et v tels que $au + 1105v = 1$. Donc $au \equiv 1\ (1105)$. on a $a^{n-1} \equiv 1\ (n)$.
Si les nombres a et $n = 1105$ sont premiers entre eux, alors a et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Fermat, $a^4 \equiv 1\ (5)$, donc $(a^4)^{276} \equiv 1\ (5)$, soit $a^{1104} \equiv 1\ (5)$. De même, a et 13 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Fermat, $a^{12} \equiv 1\ (13)$, donc $(a^{12})^{92} \equiv 1\ (13)$, soit $a^{1104} \equiv 1\ (13)$. De même, a et 17 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Fermat, $a^{16} \equiv 1\ (17)$, donc $(a^{16})^{69} \equiv 1\ (17)$, soit $a^{1104} \equiv 1\ (17)$.
Ainsi, $a^{1104} - 1 = 5k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $a^{1104} - 1 = 13k'$, avec $k' \in \mathbb{Z}$, $a^{1104} - 1 = 17k''$, avec $k'' \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $5k = 13k' = 17k''$, et comme 5 et 13 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 13 divise k, soit $k = 13q$, avec $q \in \mathbb{Z}$, soit $5k = 65q = 17k''$; 17 et 65 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise q, soit $q = 17q'$, avec $q' \in \mathbb{Z}$, soit $5k = 65q = 1105q'$; donc $a^{1104} - 1 = 1105q'$;
ce qui prouve que $a^{1104} - 1 \equiv 0\ (1105)$, soit $a^{1104} \equiv 1\ (1105)$.

3. La réciproque du petit théorème de Fermat est fausse, puisque 1105 est un entier non premier pour lequel la conclusion du petit théorème de Fermat est vraie. Un tel nombre est appelé nombre de Carmichaël. 561 en est le plus petit.