

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i \bar{z}$.

a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1 - i$.

b. Soit D' la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D' .

Calculer une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{w})$.

Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

c. Déterminer l'écriture complexe de r .

2. Dans cette question on considère l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i\bar{z} = \frac{z+z'}{2}$.

a. Soit le point A d'affixe $z = 2 + i$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p .

b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.

c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p .

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.

Construire l'image A' du point A par f .

Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ , que l'on déterminera.