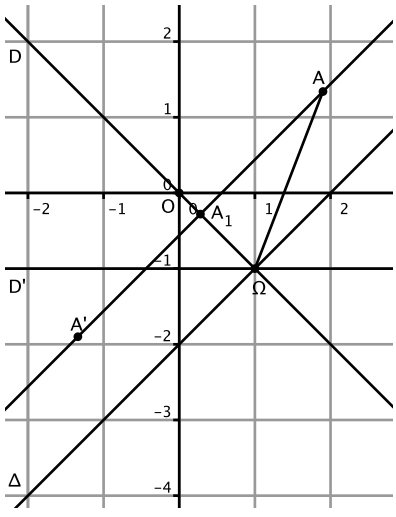
1. a. L'application s est une similitude car elle est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$, et elle possède deux points invariants : O et le point d'affixe $1 - i$. Donc s est la réflexion d'axe la droite D de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1 - i$.
b. Soit D' la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D'.
Une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\,\vec{w})$ est égale à $\arg\left(\dfrac{1-i}{1}\right) = \arg(1-i) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$.

Géométriquement la composée $r = s' \circ s$ est la rotation de centre $\Omega(1 - i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Démontrons-le : Soit M d'affixe z un point du plan, M' d'affixe z' son image par s et M'' d'affixe z'' l'image de M' par s'.
On sait que M' = s(M) et M'' = s'(M') = s'(s(M)) = $s' \circ s$(M), d'où M'' = r(M).
On a $z' = -i\,\bar{z}$ et $z'' = \bar{z}' - 2i = \overline{-i\,\bar{z}} - 2i = iz - 2i$. Le point invariant de cette transformation est $\Omega(\omega)$ tel que $\omega = i\omega - 2i$, soit $\omega(1 - i) = -2i$, soit $\omega = \dfrac{-2i}{1-i} = \dfrac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i$.
Et $z' - 1 + i = iz - 2i - 1 + i = i(z - 1 + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(1 - i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

c. L'écriture complexe de r est $z' - 1 + i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i)$.
2. Dans cette question on considère l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}i\bar{z} = \dfrac{z+z'}{2}$.
a. Soit le point A d'affixe $z = 2 + i$. L'affixe du point A_1 image de A par p est égale à
$z_1 = \dfrac{1}{2}(2+i) - \dfrac{1}{2}i(2-i) = \dfrac{1-i}{2}$.
b. Pour montrer que tout point M du plan a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$, on montre que la partie imaginaire de z_1 est égale à l'opposé de la partie réelle de z_1 :
Posons $z = x + iy$ avec x et y des réels; on a alors $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}i\bar{z} = \dfrac{x+iy-i(x-iy)}{2} = \dfrac{x-y+i(-x+y)}{2}$.
Donc $\mathrm{Re}(z_1) = \dfrac{x-y}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{-x+y}{2} = -\mathrm{Re}(z_1)$. Donc les coordonnées de M_1 vérifient l'équation $y = -x$, et est donc sur la droite d'équation $y = -x$ qui est la droite D.
c. L'image de M par l'application p est située sur la droite D. De plus, M_1 est le milieu de [MM'] par la relation $z_1 = \dfrac{z+z'}{2}$, et M' est le symétrique de M par rapport à cette même droite D; donc (MM_1) est perpendiculaire à D.
Donc p est la projection orthogonale sur la droite D.
3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construction de l'image A' du point A par f sur la figure.
Soit M un point du plan d'affixe z; $s \circ p(M) = s(M_1) = M_1 = p(M)$ puisque $M_1 \in$ D et que s est la réflexion d'axe D. Donc $s \circ p = p$.
Ainsi, $f = s' \circ p = s' \circ s \circ p = r \circ p$.
Pour tout point M du plan, $f(M) = r \circ p(M) = r(M_1)$. L'image de M_1 par r est située sur la droite Δ image de D par la rotation r ; il s'agit de la droite perpendiculaire à D passant par Ω d'équation $y = x - 1$.