Corrigé Devoir surveillé n° 1 Terminale S spécialité

Exercice 1 : Soient a et b deux entiers relatifs. Le reste de la division euclidienne de a par 73 est 48, donc il existe un unique entier q tel que $a = 73q + 48$; le reste de la division euclidienne de b par 73 est 57, donc il existe un unique entier q' tel que $b = 73q' + 57$. Ainsi $a + b = 73(q + q') + 48 + 57 = 73(q + q') + 105 = 73(q + q' + 1) + 32$.
Donc le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 73 est 32.

Exercice 2 : Le 9 octobre 2008 est un jeudi. Il y a 13 ans entre 2008 et 2021 et 3 années bissextiles.
Comme $365 = 52\times7 + 1$, chaque année, le jour de la semaine est décalé d'un jour, sauf les années bissextiles où il est décalé de deux jours. Entre le jeudi 9 octobre 2008 et le 9 octobre 2021, il y a donc 13 + 3 jours de décalage, soit 16 jours, soit deux semaines et deux jours. Donc le 9 octobre 2021 sera un samedi.

Exercice 3 : 1. L'ensemble des diviseurs de 30 est $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, -1, -2, -3, -5, -6, -10, -15, -30\}$.
2. Pour montrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $n(n^4 - 1)$ est divisible par 30, il suffit de montrer que ce nombre est divisible par 2, 3 et 5, car $2\times3\times5 = 30$.
On a $n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.
Divisibilité par 2 : Si n est pair, alors $n(n^4 - 1)$ est divisible par 2.
Si n est impair, alors $n +1$ est pair et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 2.
Donc, pour tout entier naturel n, le nombre $n(n^4 - 1)$ est divisible par 2.
Divisibilité par 3 : Tout entier naturel n s'écrit sous la forme $3k$, $3k +1$ ou $3k + 2$ où k est un entier naturel.
Si $n = 3k$, alors $n(n^4 - 1)$ est divisible par 3.
Si $n = 3k + 1$, alors $n - 1 = 3k$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 3.
Si $n = 3k + 2$, alors $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 3.
Donc, pour tout entier naturel n, le nombre $n(n^4 - 1)$ est divisible par 3.
Divisibilité par 5 : Tout entier naturel n s'écrit sous la forme $5k$, $5k +1$, $5k +2$, $5k +3$ ou $5k + 4$ où k est un entier naturel.
Si $n = 5k$, alors $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.
Si $n = 5k + 1$, alors $n - 1 = 5k$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.
Si $n = 5k + 2$, alors $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.
Si $n = 5k + 3$, alors $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.
Si $n = 5k + 4$, alors $n + 1 = 5k + 5 = 5(k + 1)$, et $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.
Donc, pour tout entier naturel n, le nombre $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.

Ainsi, $n(n^4 - 1)$ est divisible par 2, 3 et 5, donc divisible par 30.

Exercice 4 : Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
a) Le produit de deux entiers naturels pairs est pair : VRAI; soient n et n' deux entiers pairs; il existe deux entiers k et k' tels que $n = 2k$ et $n' = 2k'$, doù $nn' = 4kk' = 2(2kk')$ qui est un nombre pair.
b) Le produit de deux entiers naturels impairs est impair : VRAI; soient n et n' deux entiers impairs; il existe deux entiers k et k' tels que $n = 2k +1$ et $n' = 2k' + 1$, doù $nn' = (2k +1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$ qui est un nombre impair.
c) La somme de deux entiers naturels impairs est impair : FAUX; contre-exemple : 5 + 3 = 8 qui est pair.
d) Tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés : soit n un entier naturel impair; il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$ qui est la différence de deux carrés.
Mais, tout entier naturel impair ne peut s'écrire comme somme de deux carrés : 3 est un entier naturel impair; 3 = 0 + 3 ou 3 = 2 + 1; ce sont les seules sommes égale à 3 avec deux entiers positifs; dans les deux cas, l'un des deux nombres n'est pas un carré d'entiers. Donc, tout entier naturel impair ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés. FAUX

Exercice 5 : Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
1. On a $u_0 = 3^{2\times0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$; $u_1 = 3^{2\times1+1} + 2^{1+2} = 27 + 8 = 35 = 7\times5$;
$u_2 = 3^{2\times2+1} + 2^{2+2} = 243 + 16 = 259 = 7\times37$; ils sont bien divisibles par 7.
2. On peut écrire $2^{n+2} = u_n - 3^{2n+1}$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} = 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1} = 3^{2n+1}\times3^2 + 2^{n+2}\times2 =$
$3^{2n+1}\times9 + (u_n - 3^{2n+1})\times2 = 2u_n + 9\times3^{2n+1} - 2\times3^{2n+1} = 2u_n + 7\times3^{2n+1}$.
3. On montre que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 7 en utilisant un raisonnement par récurrence :
Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 7$ est divisible par 7 ;
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n, u_n est divisible par 7, et on démontre que u_{n+1} est divisible par 7 :
On suppose qu'il existe un entier k tel que $u_n = 7k$; on sait que $u_{n+1} = 2u_n + 7\times3^{2n+1} = 2\times7k + 7\times3^{2n+1} = 7(2k + 3^{2n+1})$ qui est divisible par 7.
On a donc bien montré que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 7.