Exercice 1 **(5 points)**

1. Soient a et b deux entiers vérifiant $a \equiv 4\ (5)$ et $b \equiv 3\ (5)$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.
2. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5.

Exercice 2 **(2 points)**

Montrer que pour tout entier naturel n , $10^n(9n - 1)$ a pour reste 8 dans la division euclidienne par 9.

Exercice 3 **(6 points)**

1. Déterminer, pour tout entier naturel n, les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2008^{2009} - 6$ par 13.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4 **(5 points)**

On considère un entier naturel n.
1. Démontrer que n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
2. Démontrer que n^2 est divisible par 8 si et seulement si n est divisible par 4.
3. En déduire que, pour tout entier naturel a et b, le nombre $a^2 + b^2 + 2$ n'est pas divisible par 8.

Exercice 5 **(2 points)**

On considère les entiers naturels x, y et z vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$.
Montrer que l'un des entiers x ou y est divisible par 3.