<u>Corrigé</u> <u>Devoir surveillé n° 2</u> <u>Terminale S spécialité</u>

Exercice 1 : 1. Soient a et b deux entiers vérifiant $a \equiv 4$ (5) et $b \equiv 3$ (5).
En utilisant les propriétés sur les congruences, on trouve $a^2 \equiv 16 \equiv 1$ (5) et $b^2 \equiv 9 \equiv 4$ (5), puis $7a^2 \equiv 7 \equiv 2$ (5); $4b^2 \equiv 1$ (5); $2ab \equiv 24 \equiv 4$ (5). Ainsi $7a^2 - 4b^2 + 2ab \equiv 2 - 1 + 4 \equiv 0$ (5). Donc le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5 est 0.
2. On sait que $n^2 - 3n + 6 \equiv n^2 + 2n + 1 \equiv (n + 1)^2$ (5).
Il faut que $(n + 1)^2 \equiv 0$ (5), donc $n + 1 \equiv 0$ (5), soit $n \equiv -1 \equiv 4$ (5).
Donc l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5 est $\{n = 5k + 4, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2 : On sait que $10 \equiv 1$ (9), donc pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1$ (9).
Ainsi, pour tout entier naturel n, $10^n(9n - 1) \equiv 9n - 1 \equiv -1 \equiv 8$ (9). Donc, pour tout entier naturel n, $10^n(9n - 1)$ a pour reste 8 dans la division euclidienne par 9.

Exercice 3 : 1. Pour tout entier naturel n, on donne les restes r_n de la division euclidienne de 5^n par 13 dans un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n	1	5	12	8	1	5	12	8	1

On retrouve une période des restes 1, 5, 12 et 8.
Si $n = 4k$, $5^n \equiv 5^{4k} \equiv 1^k \equiv 1$ (13).
Si $n = 4k + 1$, $5^n \equiv 5^{4k+1} \equiv 1^k \times 5 \equiv 5$ (13). Si $n = 4k + 2$, $5^n \equiv 5^{4k+2} \equiv 1^k \times 5^2 \equiv 12$ (13).
Si $n = 4k + 3$, $5^n \equiv 5^{4k+3} \equiv 1^k \times 5^3 \equiv 8$ (13).
2. On a $2007 = 13 \times 154 + 5$, donc $2007 \equiv 5$ (13), donc $2007^{2009} \equiv 5^{2009}$ (13); comme $2009 = 4 \times 502 + 1$, $2007^{2009} - 6 \equiv 5^{2009} - 6 \equiv 5^{4\times 502+1} - 6 \equiv (5^4)^{502} \times 5 - 6 \equiv 1 \times 5 - 6 \equiv -1 \equiv 12$ (13). Donc le reste de la division euclidienne de $2007^{2009} - 6$ par 13 est 12.
3. On a $31 \equiv 5$ (13), et $18 \equiv 5$ (13). Pour tout entier naturel n supérieur à 1, le nombre
$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5^{4n+1} + 5^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \times (5^2 + 1) \equiv 5^{4n-1} \times (26) \equiv 0$ (13), et N est divisible par 13.

Exercice 4 : On considère un entier naturel n.
1. On regarde toutes les congruences de n modulo 8 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

D'après le tableau, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
2. Si n est divisible par 4, alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $n^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$, donc n^2 est divisible par 8. Réciproquement, si n^2 est divisible par 8, alors $n^2 \equiv 0$ (8), et d'après le tableau de la question précédente, $n \equiv 0$ (4), donc n est divisible par 4.
3. Ainsi, pour tout entier naturel a et b, le nombre $a^2 + b^2$ peut être congru à 0, 1, 4, 2, 5 modulo 8, donc le nombre $a^2 + b^2 + 2$ peut être congru à 2, 3, 5, 4, 7 modulo 8, et n'est donc pas divisible par 8.

Exercice 5 : On considère les entiers naturels x, y et z vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$.
On regarde toutes les congruences d'un entier naturel n modulo 3 :
Si $n \equiv 0$ (3), alors $n^2 \equiv 0$ (3); Si $n \equiv 1$ (3), alors $n^2 \equiv 1$ (3); Si $n \equiv 2$ (3), alors $n^2 \equiv 1$ (3).
Donc, modulo 3, le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1.
Ainsi, si x et y ne sont pas divisibles par 3, alors $x^2 \equiv 1$ (3) et $y^2 \equiv 1$ (3), donc $z^2 \equiv 2$ (3); ce qui est impossible.
Donc l'un des entiers x ou y est divisible par 3.