Corrigé Devoir surveillé n° 3 Terminale S spécialité *27 novembre 2008*

Exercice 1 : 1. On considère un nombre premier p strictement supérieur à 2.
a) Comme p est un nombre premier strictement supérieur à 2, il est impair, donc de la forme $p = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$; d'où $p^2 + 7 = (2k + 1)^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 8 = 4k(k + 1) + 8$. Il suffit alors de démontrer que $k(k + 1)$ est divisible par 2 : si $k \equiv 0\ (2)$, alors $k(k + 1) \equiv 0\ (2)$, et si $k \equiv 1\ (2)$, alors $k(k + 1) \equiv 0\ (2)$.
Donc, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $k(k + 1)$ est divisible par 2, donc s'écrit $2q$ et
$p^2 + 7 = 4k(k + 1) + 8 = 4\times 2q + 8 = 8(q + 1)$. Ainsi, $p^2 + 7$ est divisible par 8.
b) La réciproque : « Si $p^2 + 7$ est divisible par 8 alors p est premier » est fausse : contre-exemple : si $p = 9$, $p^2 + 7 = 88 = 8\times 11$ est divisible par 8 alors que p n'est pas premier.
2. On considère un nombre premier p strictement supérieur à 3.
On peut écrire $p^2 – 1 = p^2 + 7 – 8 = 8(m + 1)$ avec $p^2 + 7 = 8m$ et $m \in \mathbb{N}^*$ puisque $p^2 + 7$ est divisible par 8.
Il reste à montrer que $p^2 – 1$ est divisible par 3 : d'abord p n'est pas congru à 0 modulo 3, puisque p est premier strictement supérieur à 3; si $p \equiv 1\ (3)$, alors $p^2 – 1 \equiv 0\ (3)$, et si $p \equiv 2\ (3)$, alors $p^2 – 1 \equiv 4 – 1 \equiv 0\ (3)$.
Donc $p^2 – 1$ est divisible par 3, et pas suite, $p^2 – 1$ est divisible par $8\times 3 = 24$.

Exercice 2 : On note E l'ensemble des nombres palindromes de quatre chiffres, c'est-à-dire les nombres n s'écrivant $\overline{abba} = a + 10b + 100b + 1000a$ (a et b sont des chiffres et a est non nul).
1. Décomposition en produit de facteurs premiers : $1001 = 7\times 11\times 13$, $3113 = 11\times 283$ et $2772 = 2^2\times 3^2\times 7\times 11$.
2. Tout nombre n de E s'écrit $a + 10b + 100b + 1000a = 1001a + 110b = 11(7\times 13a + 10b)$ et est divisible par 11.
3. Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5; un nombre de E est divisible par 5 si $a = 5$ puisque a est non nul. Donc b prend les valeurs de 0 à 9. Il y a donc 10 nombres de E divisibles par 5.
4. Un nombre n de E qui a exactement deux diviseurs premiers : 3113.
5. Un nombre n de E qui a exactement trois diviseurs premiers : 1001.

Exercice 3 : QCM :
1. A car $3^{n+6} – 3^n = 3^n(3^6 – 1) = 3^n \times 728 = 7\times 3^n \times 104$ est divisible par 7.

2. B car $3^n + 7 = 3^{5k+i} + 7 = 243^k \times 3^i + 7 \equiv 1^k \times 3^i + 7 \equiv 3^i + 7\ (11)$; et $3^i + 7$ est multiple de 11 si $i = 4$: $3^4 + 7 = 88$.

3. A : $a^2 – b^2 = p$ équivaut à $(a – b)(a + b) = p$ est premier si et seulement si $a – b = 1$ ou $a + b = 1$, soit $a = b + 1$ ou $a = 1 – b$ (impossible, car sinon p est négatif).

4. C car $p = n^2 + 9n + 14 = (n + 2)(n + 7)$ et n entier naturel implique $n + 2 \geqslant 2$ et $n + 7 \geqslant 7$.

5. B et C : Si p divise n, alors $n = qp$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $n^2 = q^2p^2 = (q^2p)p$.

6. A et B : 15 divise n, alors $n = 15q$ avec $q \in \mathbb{N}$, $n^2 = 225q^2 = 9\times 25q^2 = 45\times 5q^2$. Par contre, si n est pair, alors q est pair, donc $n = 15\times 2q'$ avec $q' \in \mathbb{N}$, $n^2 = 900q'^2$ qui n'est pas nécessairement un multiple de 40.