Corrigé Devoir surveillé n° 4 Terminale S spécialité

Exercice 1 : On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
1. On utilise l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 109 et 226 :
$226 = 2\times109 + 8$; $109 = 13\times8 + 5$; $8 = 1\times5 + 3$; $5 = 1\times3 + 2$; $3 = 1\times2 + 1$; $2 = 1\times2 + 0$.
Donc le PGCD(226; 109) = 1; les deux nombres sont premiers entre eux.
On en conclut que l'équation (E) admet des solutions puisque le PGCD(226; 109) divise 1.

2. Pour déterminer les solutions de (E), on utilise l'algorithme d'Euclide:
$1 = 3 - 2 = 8 - 5 - (5 - 3) = 8 - 2\times5 + 3 = 8 - 2\times5 + 8 - 5 = 2\times8 - 3\times5 = 2(226 - 2\times109) - 3(109 - 13\times8) = 2\times226 - 7\times109 + 3\times13(226 - 2\times109) = 41\times226 - 85\times109 = - 85\times109 + 41\times226$. Donc une solution particulière de l'équation (E) est le couple $(x_0 ; y_0) = (- 85; - 41)$. Soit $(x; y)$ un couple solution de (E) : par soustraction, on obtient $109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$, soit $109(x + 85) = 226(y + 41)$.
Donc 226 divise $109(x + 85)$ et est premier avec 109, donc d'après le théorème de Gauss, 226 divise $x + 85$; il existe un entier relatif k tel que $x + 85 = 226k$, soit $x = - 85 + 226k$;
en remplaçant $x + 85$ par $226k$ dans $109(x + 85) = 226(y + 41)$, on obtient $y + 41 = 109k$, soit $y = - 41 + 109k$.
Donc les solutions de l'équation (E) sont les couples $(- 85 + 226k; - 41 + 109k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant k par $k + 1$, on trouve les couples de la forme $(141 + 226k; 68 + 109k)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour en déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tel que $109d = 1 + 226e$, il suffit de montrer que l'équation (E) admet une unique solution $(d; e)$ avec $0 < d \leqslant 226$ et $0 < e \leqslant 109$: ce qui revient à $0 < 141 + 226k \leqslant 226$, on prend $k = 0$, d'où $d = 141$, et $e = 68$.

Exercice 2 : 1. Pour montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1,$$ on développe le terme de gauche :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k - 1 - x - x^2 - \cdots - x^{k-1} = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.
2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
D'après la question 1, on peut écrire $a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1 = (a^d - 1)(1 + a^d + (a^d)^2 + \cdots + (a^d)^{k-1})$,
donc $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
b. On sait que $2004 = 3\times668 = 6\times334$. Donc $2^{2\,004} - 1$ est divisible par $2^3 - 1 = 7$, et par $2^6 - 1 = 63$.
Donc $2^{2\,004} - 1 = 63k$ avec $k \in \mathbb{N}$, d'où $2^{2\,004} - 1 = 7\times9k = 9\times7k$ ce qui prouve que $2^{2\,004} - 1$ est divisible par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. On sait que dans ce cas, les entiers m' et n' sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe des entiers relatifs u et v tels que : $m'u - n'v = 1$,
soit en multipliant par d, on trouve $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. On peut écrire $mu = nv + d$.
On a $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\, a^d = a^{mu} - 1 - a^{nv} \times a^d + a^d = a^{mu} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^{mu} - 1 - a^{mu} + a^d = a^d - 1$. Cette relation est de la forme AU + BV = $a^d - 1$.
D'après la question 2, $a^d - 1$ divise $a^{mu} - 1$ et $a^{nv} - 1$; de plus, la relation précédente prouve que le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$ divise $a^d - 1$; donc $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. On sait que PGCD(60; 63) = 3, donc en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$ est $2^3 - 1 = 7$.