Corrigé Devoir surveillé n° 5 Terminale S spécialité

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.
a. Le théorème de Bezout affirme que si 11 et 24 sont premiers entre eux, alors l'équation $11n - 24m = 1$ a des solutions entières. Or 11 est premier et ne divise pas 24, donc 11 et 24 sont premiers entre eux.
b. On utilise l'algorithme d'Euclide : $24 = 11\times2 + 2$, $11 = 2\times5 + 1$.
D'où $1 = 11 - 2\times5 = 11 - (24 - 11\times2)\times5 = 11\times11 - 5\times24$. Donc une solution particulière de l'équation (1) est $(11; 5)$.
c. Par différence, $11(n - 11) - 24(m - 5) = 0$, soit $11(n - 11) = 24(m - 5)$. D'après le théorème de Gauss, comme 11 et 24 sont premiers entre eux, alors 24 divise $n - 11$, soit $n - 11 = 24k$ avec $k \in\mathbb{Z}$, soit $n = 24k + 11$. En remplaçant $n - 11$ dans $11(n - 11) = 24(m - 5)$, on trouve $m - 5 = 11k$, soit $m = 11k + 5$. L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $\{(24k + 11;\ 11k + 5)\ ,\ k \in\mathbb{Z}\}$.

2. Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$:
a. On a $10 \equiv 1\ (9)$, donc pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1\ (9)$, donc $10^{11} \equiv 1\ (9)$, soit $10^{11} - 1 \equiv 0\ (9)$, et $10^{24} \equiv 1\ (9)$, soit $10^{24} - 1 \equiv 0\ (9)$. Donc 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), alors $10^{11n} = 10^{1 + 24m}$.
Ainsi, $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 1 - 10^{24m+1} + 10 = 10^{11n} - 1 - 10^{11n} + 10 = 9$.
c. D'après l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^0)$, on peut écrire
$10^{11n} - 1 = (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \ldots + 1)$, donc $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
De la même manière, $10^{24} - 1$ divise $10^{24m} - 1$.
Soit $10^{11n} - 1 = N(10^{11} - 1)$ et $10^{24m} - 1 = M'(10^{24} - 1)$ alors de la relation $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$, on déduit $N(10^{11} - 1) - 10\,M'(10^{24} - 1) = N(10^{11} - 1) - M(10^{24} - 1) = 9$, avec $10M' = M$. Donc il existe deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.
d. Par le théorème de Bezout, l 'équation $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$ a des solutions si et seulement si le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9. Donc tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
e. On a vu que le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9 et que $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ sont divisibles par 9, donc le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ est 9.

3. a) Par le théorème de Fermat, 13 est un nombre premier et 10 est premier avec 13, donc $10^{12} \equiv 1\ (13)$.
b) On en déduit que $10^{24} = (10^{12})^2 \equiv 1^2 \equiv 1\ (13)$. Donc $10^{24} - 1$ est divisible par 13.
c) Par le théorème de Fermat, 7 est un nombre premier et 10 est premier avec 7, donc $10^6 \equiv 1\ (7)$. On en déduit que $10^{24} = (10^6)^4 \equiv 1^4 \equiv 1\ (7)$. Donc $10^{24} - 1$ est divisible par 7.
d) De plus, $10 \equiv 1\ (3)$, donc $10^{24} \equiv 1^{24} \equiv 1\ (3)$. Donc $10^{24} - 1$ est divisible par 3. Ainsi $10^{24} - 1$ est divisible par 3, 7 et 13 qui sont premiers entre eux, donc $10^{24} - 1$ est divisible par $3\times7\times13 = 273$.