CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 TERMINALE S SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = i$, $z_C = -i$ et $z_D = 2 - i$.
1. La similitude directe s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$; de plus, elle transforme A en C et B en D, donc $z_C = az_A + b$ et $z_D = az_B + b$, soit $-i = a(1 + i) + b$ et $2 - i = ai + b$; en soustrayant les deux équations, on trouve $-2 = a(1 + i - i)$, soit $a = -2$; et en remplaçant dans la première équation,
on trouve $-i = -2(1 + i) + b$ et $b = 2 + i$. Ainsi l'écriture complexe de s est : $z' = -2z + 2 + i$.
2. Les éléments caractéristiques de cette similitude : le rapport est égal à $|a| = 2$; l'angle est égal à
$\arg(a) = \arg(-2) = \pi\ [2\pi]$ et le centre Ω d'affixe ω qui vérifie $\omega = -2\omega + 2 + i$, soit $3\omega = 2 + i$, soit $\omega = \dfrac{2+i}{3}$.
3. L'affixe de l'image de C par la similitude s est $z' = -2z_C + 2 + i = 2i + 2 + i = 2 + 3i$.

EXERCICE 2 :
1. À l'aide des transformations :
a. Le triangle AMB est rectangle isocèle en M de sens direct, donc AM = BM et AB = $\sqrt{2}$ AM;
$(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Ainsi, l'angle et le rapport de s_1 sont respectivement $\dfrac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
Le triangle OBN est rectangle isocèle en N de sens direct, donc BN = ON et OB = $\sqrt{2}$ ON; donc ON = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ OB ;
$(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Ainsi, l'angle et le rapport de s_2 sont respectivement $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
b. On a $r(M) = s_2 \circ s_1 (M) = s_2 (s_1 (M)) = s_2 (B) = N$. Les triangles OIP et AIP sont rectangles isocèles en I; donc $r(I) = s_2 \circ s_1 (I) = s_2 (s_1 (I)) = s_2 (P) = I$. Ainsi, I est un point invariant par r.
c. On sait que r est la composée de deux similitudes directes, donc r est une similitude directe d'angle la somme des angles de s_1 et s_2 , soit $\dfrac{\pi}{2}$; le rapport de r est le produit des rapports de s_1 et s_2 , soit 1. Donc r est une isométrie d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ ayant un point invariant I; il s'agit donc de la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
d. L'image du point O par r est le point P.
e. L'image de la droite (OM) est la droite (PN) puisque P et N sont les images respectives de O et M par r. L'angle de la rotation étant $\dfrac{\pi}{2}$, alors $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{PN}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.
2. En utilisant les nombres complexes :
a. Les écritures complexes de s_1 et s_2 :
Pour s_1 : $z' = az + b = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z + b = (1 + i)z + b$. Comme le centre est le point A d'affixe 2, $2 = (1 + i)2 + b$, on trouve $b = -2i$. s_1 s'écrit $z' = (1 + i)z - 2i$.
Pour s_2 : $z' = az + b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} z + b = \dfrac{1+i}{2} z$. Comme le centre est le point O d'affixe 0, $0 = (1 + i)0 + b$, on trouve $b = 0$. s_2 s'écrit $z' = \dfrac{1+i}{2} z$.

b. On en déduit les affixes z_M et z_N : $s_1 (M) = B$, donc $z_B = (1 + i)z_M - 2i$, soit $z_M = \dfrac{\frac{3}{2}+i}{1+i} = \dfrac{3+2i}{2(1+i)} =$
$\dfrac{(3+2i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \dfrac{9+3i}{4}$. $s_2 (B) = N$, donc $z_N = \dfrac{1+i}{2} z_B = \dfrac{1+i}{2}(\dfrac{3}{2}+i) = \dfrac{1+5i}{4}$.
c. L'affixe z_P du point P est $1 - i$. Pour démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires, on calcule une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{PN}) = \arg\left(\dfrac{z_N - z_P}{z_M}\right) = \arg\left(\dfrac{\frac{1+5i}{4}-(1-i)}{\frac{9+3i}{4}}\right) = \arg\left(\dfrac{1+5i-4(1-i)}{9+3i}\right) =$
$\arg\left(\dfrac{-3+9i}{9+3i}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Donc les droites (OM) et (PN) sont bien perpendiculaires.