Corrigé du baccalauréat blanc terminales S

Lycée Mistral Avignon Mars 2011

Exercice 1 **6 points**

1. On sait que cette équation a pour solutions les fonctions : $x \longmapsto K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$.

2.
$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$

   a. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(m\,x^2 + p\,x\right)$: f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(m\,x^2+p\,x\right) + (2m\,x+p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   f est solution de E$'$ si et seulement si $2f' + f = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ équivaut à
   $-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(m\,x^2+p\,x\right) + 2(2m\,x+p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(m\,x^2+p\,x\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$
   équivaut à
   $-m\,x^2 - p\,x + 4m\,x + 2p + m\,x^2 + p\,x = x+1$ équivaut à $4m\,x + 2p = x+1$ équivaut à $(4m-1)x + (2p-1) = 0$.
   Cette fonction affine est nulle si et seulement si $4m-1=0$ et $2p-1=0$, soit si $m = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$.

   b. On a : g et f solutions de E$'$ si et seulement si
   $$\begin{cases} 2g' + g &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2f' + f &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \end{cases} \Rightarrow \sim \text{(par différence)}$$
   $$\begin{cases} 2g' + g &= \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2(g'-f') + g - f &= 0 \end{cases}$$
   Donc g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E)
   On a donc $g(x) - f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(x^2+2x\right)$ d'où $g(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(x^2+2x+K'\right)$, $K' \in \mathbb{R}$.

3. h produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$h'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(-\frac{x^2}{2} - x + 2x + 2\right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + x + 2\right)$ qui est du signe du trinôme $-\frac{x^2}{2} + x + 2$.
Pour ce trinôme $\Delta = 1 + 4 = 5$; il a donc deux racines $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$. Il est négatif (du signe de $-\frac{x}{2}$) sauf entre les racines.
$h'(x)$ est donc négative sauf sur l'intervalle $[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$.
h est donc décroissante sauf sur $[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$ où elle est croissante.

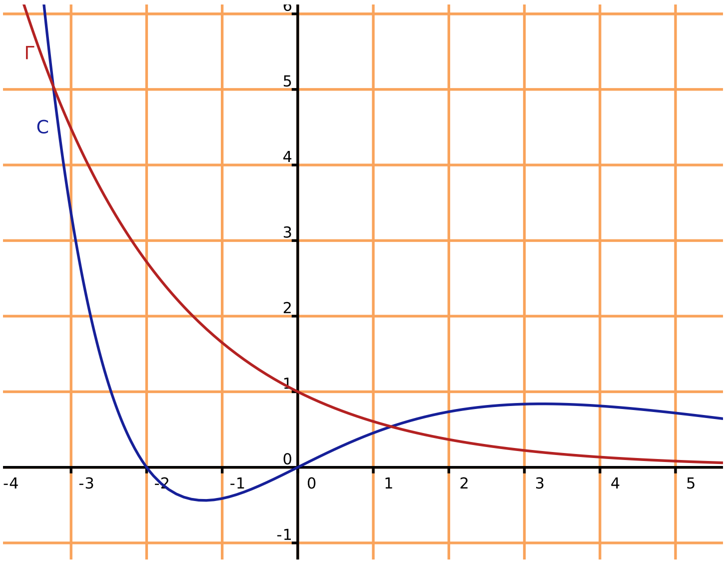
4. • On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$, quel que soit le naturel x ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \times 2x = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

5.

   a. Étudions la fonction d définie par
   $d(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4}\right)$ qui est du signe du trinôme $-x^2 - 2x + 4$.
   Pour ce trinôme $\Delta = 4 + 16 = 20 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$. Il a donc pour racines
   $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{5}$. Il est négatif sauf entre les deux racines.
   Donc la fonction d est négative sauf sur l'intervalle $[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$.

Conclusion : la courbe Γ est sous la courbe $\mathcal{C}$ sauf entre $-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$. Les deux courbes ayant deux points communs pour $x=-1-\sqrt{5}$ et $x=-1+\sqrt{5}$.

b.



Exercice 2 **5 points**

1.

a. Pour un point M d'affixe z et son image M' par h d'affixe z', la traduction complexe de l'égalité $\overrightarrow{\text{SM}'}=3\overrightarrow{\text{SM}}$ est :
$z'-(-5+5\text{i})=3[z-(-5+5\text{i})]$ équivaut à $z'=-5+5\text{i}+3z+15-15\text{i}$ équivaut à $z'=3z+10-10\text{i}$.

b. On a C $=h(\text{A})$, donc $c=3(-2+4\text{i})+10-10\text{i}=4+2\text{i}$.
De même D $=h(\text{B})$ donc $d=3(-4+2\text{i}+10-10\text{i}=-2-4\text{i}$.

2. On a : $|a|^2=4+16=20$, $|b|^2=16+4=20$, $|c|^2=16+4=20$ et $|d|^2=4+16=20$, d'où $|a|=\text{OA}=|b|=\text{OB}=|c|=\text{OC}=|d|=\text{OD}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.
Les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.

3. Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $(-3;3)$.
$M(x;\ y)$ appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si $(M\text{I})\perp(\text{AB})$ équivaut à $\overrightarrow{\text{MI}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0$ équivaut à $-2(-3-x)-2(3-y)=0$ équivaut à $-3-x+3-y=0$ équivaut à $x+y=0$
S$(-5;5)$ appartient à cette médiatrice ;
$\Omega(-2;2)$ appartient à cette médiatrice.
Conclusion : (SΩ) est la médiatrice de [AB].

4.

a. On a $p=\frac{1}{2}(-2+4\text{i}+4+2\text{i})=1+3\text{i}$.

b. $\dfrac{\omega-p}{d-b}=\dfrac{-2+2i-1-3i}{-2-4i+4-2i}=\dfrac{-3-i}{2-6i}=\dfrac{(-3-i)(2+6i)}{(2-6i)(2+6i)}=\dfrac{-6+6-18i-2i}{4+36}=\dfrac{-20i}{40}=-\dfrac{1}{2}\text{i}$.
En terme d'argument la relation précédente signifie que :
$\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{P\Omega}\right)=-\frac{\pi}{2}$. Conclusion : la droite (PΩ) est perpendiculaire à la droite (BD).

5. Par l'homothétie h l'image (CD) de la droite (AB) est parallèle à cette dernière : le quadrilatère ABDC est un trapéze ; dans ce trapèze la droite des *milieux* (PQ) est parallèle à (AB) et à (CD).
Or on a vu que (AB) et (SΩ) sont perpendiculaires. Donc (SΩ) est aussi perpendiculaire à (PQ).

Donc dans le triangle PQS, (SΩ) et (PΩ) sont deux hauteurs : le point Ω est l'orthocentre du triangle PQS.

Exercice 3 **4 points**

1.

a.

- La fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est la composée des fonctions $x \mapsto 2x$ et $X \mapsto \ln(X)$ qui sont dérivables respectivement sur $[1 ; +\infty[$ et $[\ln 2 ; +\infty[$.
  La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \frac{2}{2x} - 1\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
  Comme $x > 0$, cette dérivée est du signe du numérateur $1 - x$.
  Donc $g'(x) = 0$ équivaut à$x = 1$,
  $g'(x) < 0$ équivaut à $1 < x$.
  Conclusion : la fonction g est décroissante sur $]1 ; +\infty[$.
- D'autre part $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2$.
  En écrivant $g(x) = 2x\left(\frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)$.
  On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ puis par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
- La fonction g est donc dérivable donc continue sur $[1\sim ; \sim +\infty[$ et décroissante de $\ln 2$ à moins l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

b. D'après la question précédente $g(\alpha) = 0$ équivaut à $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ équivaut à $\alpha = \ln(2\alpha) + 1$.

2.

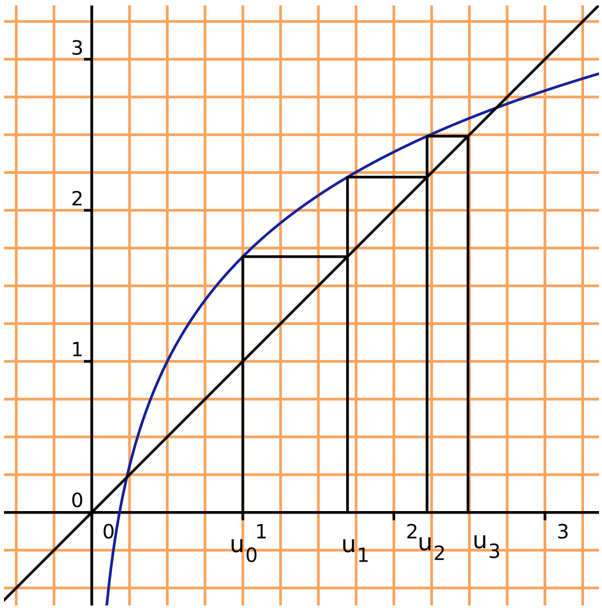
a. En allant *verticalement* vers la courbe (Γ) et *horizontalement* vers la droite d'équation $y = x$, on obtient quatre points de cette droite dont les abscisses sont u_0, u_1, u_2, u_3.
Voir la figure.

b. Par récurrence :

- Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) + 1 \approx 1,69 < 3$, on a bien :
$$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$
- Hérédité :
  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ (1).
  Donc $u_{n+2} = \ln(2u_{n+1}) + 1$.
  Or (1) implique par produit par 2 :
  $2 \leqslant 2u_n \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 6$, puis
  $\ln 2 \leqslant \ln(2u_n) \leqslant \ln(2u_{n+1}) \leqslant \ln 6$ et enfin
  $1 + \ln 2 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2u_{n+1}) + 1 \leqslant \ln 6 + 1$ soit
  $1 + \ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln 6 + 1$.
  Comme $1 + \ln 6 \approx 2,791 < 3$, on en déduit finalement que
  $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel $n, \sim 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 3$.
Comme la fonction g est continue, la fonction définie par $g(x) + x$ l'est aussi et à la limite on a donc :
$\ell = \ln(\ell) + 1$. Or on a vu à la question 1. b. que α était la solution de cette équation.
Conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.



Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.a. Le couple (x, y) = (1, 1) est une solution particulière évidente. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation (E') : 8(x - 1) = 5(y - 1).

Soit (x, y) une solution de (E). 5 | 5(y - 1) donc 5 | 8(x - 1). Or pgcd(5; 8) = 1 donc d'après le théorème de Gauss, 5 | x - 1. Soit donc k dans $\mathbb{Z}$ tel que x - 1 = 5k. Alors x = 1 + 5k. L'équation (E') donne alors 8(5k) = 5(y - 1) donc 8k = y - 1 et y = 1 + 8k. Ainsi, (x, y) est solution de (E), s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que x = 1 + 5k et y = 1 + 8k.

Conclusion : $S_{(E)} = \{(1 + 5k, 1 + 8k), k \in \mathbb{Z}\}$.

1. b. 8p - 5q = (m - 1) - (m - 4) = 3 donc (p, q) est solution de (E). Par suite, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que p = 1 + 5k, et donc m = 8p + 1 = 40k + 9 donc on a bien m $\equiv$ 9 (40).

1. c. Ce nombre est bien sûr m_0 = 2009, pour lequel p_0 = 251 et q_0 = 401.

2. a. $2^3 = 8 \equiv 1$ (7) donc $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1$ (7) : $2^{3k} \equiv 1$ (7).

2. b. Procédons à la division euclidienne de 2009 par 3 : 2009 = 669 × 3 + 2 donc $2^{2009} = (2^3)^{669} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4$ (7) donc le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.

3. a. $10 \equiv 3$ (7) donc $10^2 \equiv 9 \equiv 2$ (7) donc $10^3 \equiv 6 \equiv -1$ (7).

3. b. N est divisible par 7 si et seulement si N $\equiv$ 0 (7). Cette équation est équivalente à $a \times 10^3 + b \equiv 0$ (7), elle-même équivalente à $-a + b \equiv 0$ (7), soit $a \equiv b$ (7).

$a = 1$: la condition $b \equiv 1$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 1$ ou $b = 8$. D'où $N = 1001$ et $N = 1008$.
$a = 2$: la condition $b \equiv 2$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 2$ ou $b = 9$. D'où $N = 2002$ et $N = 2009$.
$a = 3$: la condition $b \equiv 3$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 3$. D'où $N = 3003$.
$a = 4$: la condition $b \equiv 4$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 4$. D'où $N = 4004$.
$a = 5$: la condition $b \equiv 5$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 5$. D'où $N = 5005$.
$a = 6$: la condition $b \equiv 6$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 6$. D'où $N = 6006$.
$a = 7$: la condition $b \equiv 7$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 0$ ou $b = 7$. D'où $N = 7000$ ou $N = 7007$.
$a = 8$: la condition $b \equiv 8$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 1$ ou $b = 8$. D'où $N = 8001$ ou $N = 8008$.
$a = 9$: la condition $b \equiv 9$ (7) avec $b \in [\![0, 9]\!]$ donne $b = 2$ ou $b = 9$. D'où $N = 9002$ ou $N = 9009$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la définition $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
   • Si la suite était géométrique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $-\frac{1}{2}$; or $u_1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq u_2$.
   • Si la suite était arithmétique, d'après les deux premiers termes la raison serait égale à $\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$; or $u_1 + \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{2} = 2 \neq u_2$.
   Conclusion : la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2.

a. $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$.

b. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

c. $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

d. On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3.

a. $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.

b. On a $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$.

c. On a par définition $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit :
$w_{n+1} = 2 + w_n$.

d. L'égalité précédente montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2.
On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$.

4. On a trouvé que $w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n$.
Donc $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. Démonstration par récurrence :
• ~~ Initialisation : $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$. La formule est vraie au rang 0.
• ~~ Hérédité : supposons qu'il existe un naturel k tel que :
$S_n = \sum_{i=0}^{k=n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}$.
Donc $S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-4k-6+2k+1}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$.
La formule est vraie au rang $k+1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$