CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 1 TERMINALE S 2

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse x.

PARTIE A : Pour tout réel x, on note $f(x)$ la distance OM.

1. La distance OM = $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
Le polynôme $x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$, donc ne s'annule pas et est toujours du signe de $a = 1$, donc strictement positif. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Étude de la parité de la fonction f : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = f(x)$; donc la fonction f est paire.
3. Les limites de la fonction f : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$ car la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par la limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, et par la parité, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. Les variations de f : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;
et $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ qui est du signe du numérateur; $2x^2 - 1 = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$. D'où le tableau de signes de f' et les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0			$+$	
$2x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

5. Le maximum local de f est 1 atteint en $x = 0$; le minimum est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.
6. La représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction f :

PARTIE B :

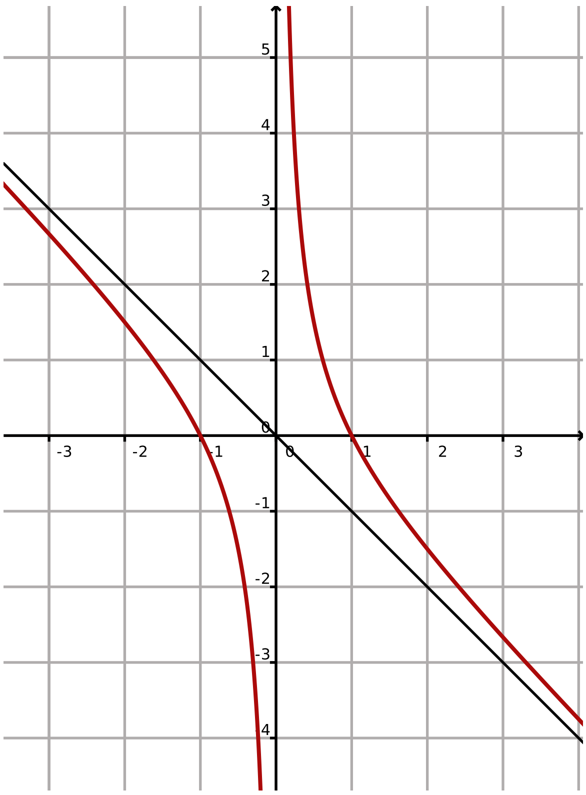
1. Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\dfrac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \dfrac{1 - x^2}{x} = g(x)$ qui est défini sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étude de la parité de la fonction g : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$g(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{-x} = \dfrac{1 - x^2}{-x} = -g(x)$; donc la fonction g est impaire.
3. La fonction g est une fonction rationnelle, donc la limite en l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x^2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Par la parité, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$.
On peut déduire que la courbe Γ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
4. Les variations de g : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables ;
et $g'(x) = \dfrac{(-2x)(x) - (1 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{x^2}$ qui est du signe du numérateur qui est strictement négatif. Donc, la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
5. Le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	↘	$+\infty$

6. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x} = \dfrac{1}{x} - x$. Et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe Γ .

7. Pour étudier la position relative de Γ et de (d) on étudie le signe de la différence $g(x) - (-x) = \frac{1}{x}$ qui est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ et strictement négatif sur $]-\infty;0[$. Donc la courbe est au-dessus de la droite (d) sur $]0\,;+\infty[$ et est en-dessous de la droite sur $]-\infty;0[$.

8. La représentation graphique de Γ et les asymptotes :



BONUS : Pour trouver les positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM), il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, soit $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} = \frac{1-x^2}{x}$;

on élève au carré : $x^4 - x^2 + 1 = \frac{1-2x^2+x^4}{x^2}$, soit

$x^6 - x^4 + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, soit $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

On considère la fonction h définie par

$h(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1$.

C'est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $h'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x = 2x(3x^4 - 4x^2 + 3)$.

Le polynôme $3x^4 - 4x^2 + 3 = 3X^2 - 4X + 3$, en posant $X = x^2$;

le discriminant est égal à $(-4)^2 - 433 = -20 < 0$, donc le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la dérivée h' est du signe de x, et la fonction h est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$. Elle atteint un minimum lorsque $x = 0$, qui vaut $h(0) = -1$;

de plus, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$;

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

Ainsi, la fonction h s'annule en deux valeurs $x_1 \simeq -0{,}656$ et $x_2 \simeq 0{,}656$.

Donc, il existe deux positions de M telles que la distance OM soit égale au coefficient directeur de (OM).