EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 strictement positif et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}$.

1. a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) en fonction de u_0 .
b) Calculer les inverses de ces quatre premiers termes.
c) Que remarque-t-on ?
2. En posant, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, déterminer la nature de la suite (v_n).
3. Écrire v_n puis u_n en fonction de n.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).
5. Étudier la convergence de la suite (u_n).
6. Déterminer u_0 pour que u_{10} soit égal à 0,025.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{9}{u_n}\right)$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 3.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère la courbe C d'équation $y = \sqrt{x+1}$, le point M de la courbe C d'abscisse $x \in [-1 ; 0]$, le point N projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.
1. Quelle est la nature du quadrilatère OPMN ?
2. On pose $a(x)$ = aire de OPMN.
Étudier la dérivabilité de la fonction a en – 1 et en 0.
3. Déterminer l'aire maximale du quadrilatère OPMN lorsque $x \in [-1 ; 0]$.