CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 2 TERMINALE S 2

EXERCICE 1 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par u_0 strictement positif et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n}$.

1. a) Les quatre premiers termes de la suite (u_n) en fonction de u_0 : $u_1 = \dfrac{u_0}{1+3u_0}$ qui est bien défini puisque $u_0 > 0$.

$$u_2 = \frac{u_1}{1+3u_1} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{1+3\frac{u_0}{1+3u_0}} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{\frac{1+6u_0}{1+3u_0}} = \frac{u_0}{1+6u_0}\ ;\ u_3 = \frac{u_2}{1+3u_2} = \frac{\frac{u_0}{1+6u_0}}{1+3\frac{u_0}{1+6u_0}} = \frac{\frac{u_0}{1+3u_0}}{\frac{1+9u_0}{1+3u_0}} = \frac{u_0}{1+9u_0}$$

b) Les inverses de ces premiers termes : $\dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1+3u_0}{u_0} = \dfrac{1}{u_0} + 3$; $\dfrac{1}{u_2} = \dfrac{1+6u_0}{u_0} = \dfrac{1}{u_0} + 6$; $\dfrac{1}{u_3} = \dfrac{1+9u_0}{u_0} = \dfrac{1}{u_0} + 9$.

c) On remarque que la suite des inverses semble être une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $\dfrac{1}{u_0}$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+3u_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + 3 = v_n + 3$. Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0}$.

3. Ainsi, $v_n = \dfrac{1}{u_0} + 3n$, et $u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{u_0}+3n} = \dfrac{1}{\frac{1+3nu_0}{u_0}} = \dfrac{u_0}{1+3nu_0}$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_0}{1+3(n+1)u_0} - \dfrac{u_0}{1+3nu_0} = \dfrac{u_0(1+3nu_0)-u_0(1+3(n+1)u_0)}{(1+3(n+1)u_0)(1+3nu_0)} =$ $\dfrac{u_0(1+3nu_0)-u_0(1+3(n+1)u_0)}{(1+3(n+1)u_0)(1+3nu_0)} = \dfrac{-3u_0^2}{(1+3(n+1)u_0)(1+3nu_0)}$. Comme $u_0 > 0$, le dénominateur est strictement positif et le numérateur strictement négatif, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+3nu_0) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la suite (u_n) converge vers 0.

6. Si $u_{10} = 0{,}025$, alors $\dfrac{u_0}{1+30u_0} = 0{,}025$, soit $u_0 = 0{,}025(1 + 30u_0)$, soit $u_0 = 0{,}025 + 0{,}75u_0$, soit $0{,}25u_0 = 0{,}025$, soit $u_0 = 0{,}1$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{9}{u_n}\right)$.

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, et $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-9}{x^2}\right)$ qui s'annule en $x = 3$ sur $]0\ ;+\infty[$, et qui est négatif sur $]0\ ;3]$ et positif sur $[3\ ;+\infty[$; donc la fonction f est décroissante sur $]0\ ;3]$ et croissante sur $[3\ ;+\infty[$; elle admet donc un minimum en $x = 3$ qui vaut $f(3) = 3$. Donc pour tout réel $x \geqslant 3$, $f(x) \geqslant 3$.

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 3 :

Initialisation : $u_0 = 4 > 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k \geqslant 3$, et montrons que $u_{k+1} \geqslant 3$:

On a $u_{k+1} = f(u_k)$, et $u_k \geqslant 3$, donc $f(u_k) \geqslant 3$, et $u_{k+1} \geqslant 3$.

Conclusion : la suite (u_n) est minorée par 3.

2. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante :

Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{25}{8} < u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_{k+1} < u_k$, et montrons que $u_{k+2} < u_{k+1}$:

Sur $[3\ ;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante, et pour tout entier n, $u_n \geqslant 3$,

donc $f(u_{k+1}) < f(u_k)$, soit $u_{k+2} < u_{k+1}$.

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leqslant \frac{1}{2^n}$:

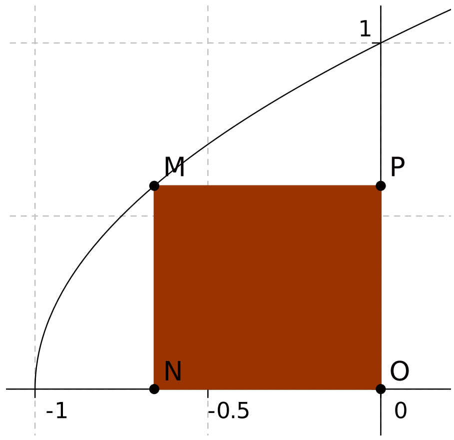
Initialisation : $u_0 - 3 = 1 \leqslant \frac{1}{2^0} = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel k : $u_k - 3 \leqslant \frac{1}{2^k}$, et montrons que $u_{k+1} - 3 \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$: $u_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{9}{u_k}\right) - 3 = \frac{1}{2}(u_k - 3) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) - \frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$,

car $u_k \geqslant 3$ entraîne $\frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{3}$ entraîne $\frac{9}{u_k} \leqslant 3$ entraîne $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{u_k}\right) \leqslant \frac{3}{2}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n - 3 \leqslant \frac{1}{2^n}$.

4. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n - 3 \leqslant \frac{1}{2^n}$, et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. La suite converge vers 0.



EXERCICE 3 : Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on considère la courbe C d'équation $y = \sqrt{x+1}$, le point M de la courbe C d'abscisse $x \in [-1 ; 0]$, le point N projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.
1. Le quadrilatère OPMN est un rectangle puisque (MN) est perpendiculaire à (ON) = axe des abscisses, (MP) est perpendiculaire à (OP) = axe des ordonnées, et (ON) est perpendiculaire à (OP).
2. On pose $a(x)$ = aire de OPMN. La fonction a est définie sur $[-1 ; 0]$, et $a(x) = \mathrm{ON}\times\mathrm{OP} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x+1} = |x| \sqrt{x+1} = -x\sqrt{x+1}$ puisque $x \in [-1 ; 0]$.
Dérivabilité de la fonction a en -1 :
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{a(-1+h)-a(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1-h)\sqrt{h}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1-h}{\sqrt{h}} = +\infty$, donc la fonction a n'est pas dérivable en -1.
La courbe représentative de a admet une tangente verticale en $x = -1$.
Dérivabilité de la fonction a en 0 : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a(h)-a(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h\sqrt{1+h}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\sqrt{1+h} = -1$, donc la fonction a est dérivable en 0 et $a'(0) = -1$.

3. Pour déterminer l'aire maximale du quadrilatère OPMN lorsque $x \in [-1 ; 0]$, on étudie les variations de a sur $[-1 ; 0]$: la fonction a est dérivable sur $]-1 ; 0]$ comme produit et composée de fonctions qui le sont, et
$a'(x) = -\sqrt{x+1} - x\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{-2(x+1)-x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{-3x-2}{2\sqrt{x+1}}$ qui est du signe du numérateur ; $-3x-2 \geqslant 0$ lorsque $x \leqslant \frac{-2}{3}$. Donc la fonction a est croissante sur $[-1 ; \frac{-2}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{-2}{3} ; 0]$; elle admet donc un maximum lorsque $x = \frac{-2}{3}$, qui vaut

$f(\frac{-2}{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{-2}{3}+1} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.