EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. a) Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2].
b) Montrer que si $x \in [0\,;2]$, alors $f(x) \in [0\,;2]$.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.
a) Représenter graphiquement la fonction f sur [0 ; 2] dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).
b) Construire alors les quatre premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) sur le graphique.
c) Conjecturer le sens de variations et la convergence des suites (u_n) et (v_n).
3. Montrer que, pour tout entier naturel n :
a) $1 \leqslant v_n \leqslant 2$; b) $v_{n+1} \leqslant v_n$; (On admettra que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$)
c) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α. Déterminer la valeur exacte de α.

EXERCICE 2

1. Montrer que la dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est égale à $\tan^2(x) + 1$.
2. On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x) - x$ et $g(x) = \tan(x) - 2x$.
a) Étudier les variations de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire le signe de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
b) Étudier les variations de g sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire son signe sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
c) Préciser une équation de la tangente à la courbe C représentative de la fonction f en $x = 0$.
d) Préciser le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \tan(x) - x - \dfrac{x^3}{3}$.

Étudier les variations de h sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire son signe sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (on pourra utiliser le signe de la fonction f).

4. On considère la fonction j définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $j(x) = \tan(x) - x - \dfrac{4x^3}{3}$.

Étudier les variations de j sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire son signe sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (on pourra utiliser le signe de la fonction g).

5. En déduire que pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x + \dfrac{x^3}{3} \leqslant \tan(x) \leqslant x + \dfrac{4x^3}{3}$.
6. Trouver un encadrement de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.
7. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^2}$.