CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE S 2

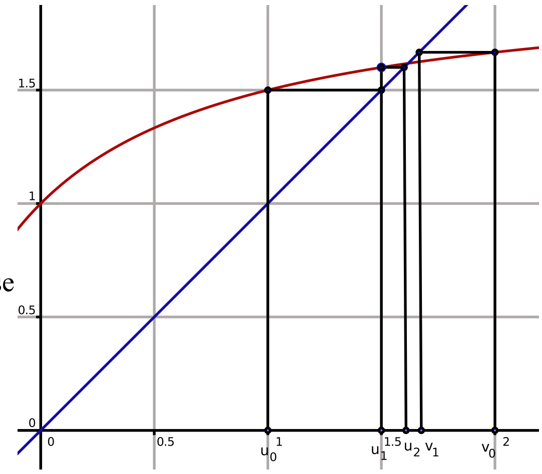
EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. a) La fonction f est dérivable sur [0 ; 2] comme quotient de fonctions dérivables,
et $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur [0 ; 2].

b) On a $f(0) = 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$; donc si $x \in [0 ; 2]$, soit $0 \leqslant x \leqslant 2$,
alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$, soit $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{3}$, et donc $f(x) \in [0 ; 2]$.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Représentation graphique de f sur [0 ; 2] et construction des quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n) :



c) Conjecture : la suite (u_n) est croissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite (d) d'équation $y = x$. La suite (v_n) est décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et (d).

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n :

a) $1 \leqslant v_n \leqslant 2$:

Initialisation : $v_0 = 2$, donc $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $1 \leqslant v_k \leqslant 2$, et montrons que $1 \leqslant v_{k+1} \leqslant 2$:
par la croissance de la fonction f, $f(1) \leqslant f(v_k) \leqslant f(2)$, soit $\dfrac{3}{2} \leqslant f(v_k) \leqslant \dfrac{5}{3}$, donc $1 \leqslant v_{k+1} \leqslant 2$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$:

Initialisation : $v_1 = \dfrac{5}{3} < v_0 = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $v_{k+1} \leqslant v_k$, et montrons que $v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$:
par la croissance de la fonction f, $f(v_{k+1}) \leqslant f(v_k)$, soit $v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$. Donc pour tout entier naturel n : $v_{n+1} \leqslant v_n$.

c) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+1} - \dfrac{2u_n+1}{u_n+1} = \dfrac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} = \dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

4. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geqslant 0$:

Initialisation : $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $v_k - u_k \geqslant 0$, et montrons que $v_{k+1} - u_{k+1} \geqslant 0$:
$v_k - u_k \geqslant 0$, $v_k + 1 \geqslant 0$, et $u_k + 1 \geqslant 0$, entraîne $v_{k+1} - u_{k+1} = \dfrac{v_k-u_k}{(v_k+1)(u_k+1)} \geqslant 0$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $v_n - u_n \geqslant 0$.

On sait que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ et $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, et $u_n + 1 \geqslant 2$,
donc $(v_n + 1)(u_n + 1) \geqslant 4$, d'où $0 < \dfrac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leqslant \dfrac{1}{4}$, d'où $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

5. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$:

Initialisation : $v_0 - u_0 = 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^0 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $v_k - u_k \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$, et montrons que $v_{k+1} - u_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k+1}$:
$v_{k+1} - u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_k - u_k) \leqslant \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k+1}$. Conclusion : Pour tout entier naturel n : $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

6. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel l. La suite (u_n) est croissante et

majorée par 2, donc elle converge vers un réel l'. On sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, suite géométrique de raison strictement comprise entre –1 et 1. Comme $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
A la limite, $l - l' = 0$, donc $l = l'$. Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite α. Pour déterminer la valeur exacte de α, on résout l'équation $f(x) = x$: $\frac{2x+1}{x+1} = x$ équivaut à $2x + 1 = x^2 + x$ et $x \neq -1$ équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$ et $x \neq -1$.Le discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$; il y a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Comme la limite commune doit être comprise entre 1 et 2, alors $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 2 : 1. La dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ est égale à
$(\tan(x))' = \frac{\cos(x)\times\cos(x)-\sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$.

2. On considère les fonctions f et g définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x) - x$ et $g(x) = \tan(x) - 2x$.

a) La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $f'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 = \tan^2(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Comme $f(0) = \tan(0) - 0 = 0$, la fonction f est négative sur $]-\frac{\pi}{2} ; 0]$ et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

b) La fonction g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $g'(x) = \tan^2(x) + 1 - 2 = \tan^2(x) - 1 = (\tan(x) - 1)(\tan(x) + 1)$. $\tan(x) - 1 = 0$ pour $\tan(x) = 1$, soit $x = \frac{\pi}{4}$.

$\tan(x) + 1 = 0$ pour $\tan(x) = -1$, soit $x = \frac{-\pi}{4}$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{\pi}{2} - 1$	↘	$1 - \frac{\pi}{2}$	↗	$+\infty$

c) Une équation de la tangente à C représentative de la fonction f en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$.
d) Il y a trois solutions à l'équation $g(x) = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$: une α sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{-\pi}{4}[$, une sur $]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ qui est 0 et une β sur $]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$. On en déduit le signe de g sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$:

négative sur $]-\frac{\pi}{2} ; \alpha]$ et sur $[0 ; \beta]$; positive sur $[\alpha ; 0]$ et sur $[\beta; \frac{\pi}{2}[$.

3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \tan(x) - x - \frac{x^3}{3}$.

La fonction h est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;
et $h'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 - x^2 = \tan^2(x) - x^2 = (\tan(x) - x)(\tan(x) + x) = f(x)(\tan(x) + x)$.
On sait que tan est positif sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et négatif sur $]\frac{-\pi}{2} ; 0]$. Donc $\tan(x) + x \leqslant 0$ sur $]\frac{-\pi}{2} ; 0]$ et $\tan(x) + x \geqslant 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$; de même pour f. Ainsi h' est positive sur $]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et h est strictement croissante.

De plus, $h(0) = 0$, donc h est négative sur $]\frac{-\pi}{2} ; 0]$ et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

4. On considère la fonction j définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par $j(x) = \tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$.

La fonction j est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables ;

et $j'(x) = \tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = \tan^2(x) - 4x^2 = (\tan(x) - 2x)(\tan(x) + 2x) = g(x)(\tan(x) + 2x)$.

On sait que tan est positif sur $[0;\ \frac{\pi}{2}[$ et négatif sur $]\frac{-\pi}{2}\,;\,0]$. Donc $\tan(x) + 2x \leqslant 0$ sur $]\frac{-\pi}{2}\,;\,0]$ et $\tan(x) + 2x \geqslant 0$ sur $[0;\ \frac{\pi}{2}[$; on connaît le signe de g. D'où le tableau de variations de j :

x	$\frac{-\pi}{2}$		α		0		β		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\tan(x) + 2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$j'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$j(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$j(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$j(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Pour $x \in [0;\ \frac{\pi}{4}[$,

$h(x) \geqslant 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} \geqslant 0$, donc $x + \frac{x^3}{3} \leqslant \tan(x)$;

$j(x) \leqslant 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{4x^3}{3} \leqslant 0$, donc $\tan(x) \leqslant x + \frac{4x^3}{3}$. On trouve ainsi $x + \frac{x^3}{3} \leqslant \tan(x) \leqslant x + \frac{4x^3}{3}$.

6. Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}\,;\,0]$,

$h(x) \leqslant 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} \leqslant 0$, donc $x + \frac{x^3}{3} \geqslant \tan(x)$;

$j(x) \geqslant 0$, soit $\tan(x) - x - \frac{4x^3}{3} \geqslant 0$, donc $\tan(x) \geqslant x + \frac{4x^3}{3}$. On trouve ainsi $x + \frac{4x^3}{3} \leqslant \tan(x) \leqslant x + \frac{x^3}{3}$.

7. Pour $x \in]0;\ \frac{\pi}{4}[$, $\frac{x^3}{3} \leqslant \tan(x) - x \leqslant \frac{4x^3}{3}$, d'où $\frac{x}{3} \leqslant \frac{\tan(x)-x}{x^2} \leqslant \frac{4x}{3}$.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}\,;\,0[$, $\frac{4x^3}{3} \leqslant \tan(x) - x \leqslant \frac{x^3}{3}$, d'où $\frac{4x}{3} \leqslant \frac{\tan(x)-x}{x^2} \leqslant \frac{x}{3}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{3} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2} = 0$.