EXERCICE 1 : On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ , $x - 1 + \dfrac{2}{e^x+1} = x + \dfrac{-(e^x+1)+2}{e^x+1} = x + \dfrac{-e^x+1}{e^x+1} = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$ ;

$x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1} = x + \dfrac{e^x+1-2e^x}{e^x+1} = x + \dfrac{-e^x+1}{e^x+1} = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1) = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1+\dfrac{2}{e^x+1}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 2$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1+\dfrac{2}{e^x+1}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ .

3. D'après la question 1, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2e^x}{e^x+1} = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$. Donc la droite (d') d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$. Donc la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

4. Pour étudier la position relative de la droite (d) par rapport à C, on détermine le signe de $f(x) - (x + 1) = \dfrac{-2e^x}{e^x+1}$ qui est strictement négatif puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ . Donc la droite (d) est au-dessus de C.

De même, la position relative de la droite (d') par rapport à C, est déterminé par le signe de $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x+1}$ qui est strictement positif . Donc C est au-dessus de la droite (d').

5. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est centré en 0, et pour tout réel $x$, $f(-x) = -x - \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} =$

$-x - \dfrac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1} = -x - \dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -x + \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -(x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}) = -f(x)$. Donc la fonction $f$ est impaire.

6. Donc C admet l'origine comme centre de symétrie.

7. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.

Et $f'(x) = 1 - \dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$. Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

8. Le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | − |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

9. $f'(0) = \dfrac{e^0+1}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = 0 - \dfrac{e^0-1}{e^0+1} = 0$. D'où une équation de la tangente T à la courbe C en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0)+ f(0) = \dfrac{x}{2}$ .

10. Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \dfrac{x}{2} = x - \dfrac{e^x-1}{e^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ .

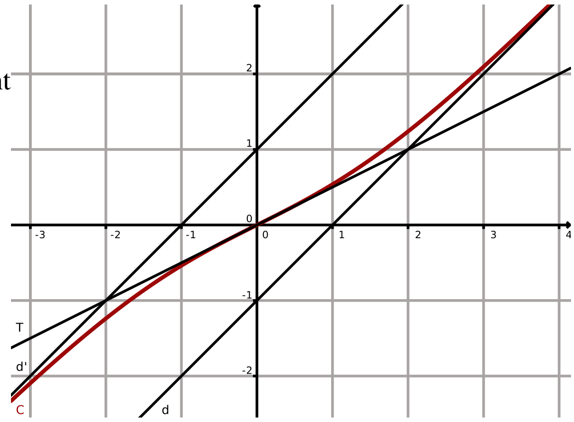
On étudie les variations de la fonction $g$ dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions dérivables ; $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x+1)^2-2e^x}{2(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2(e^x+1)^2} > 0$ donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0) = 0$, donc la fonction $g$ est négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $[0 ; +\infty[$

Donc T est au-dessus de C sur $]-\infty ; 0]$ et C est au-dessus de T sur $[0 ; +\infty[$.

11. Pour montrer que, pour tout réel $a$, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}$ , il suffit

de montrer que pour tout réel $a$, $f\,'(a) \geqslant \dfrac{1}{2}$ , soit $\dfrac{e^{2a}+1}{(e^a+1)^2} \geqslant \dfrac{1}{2}$ : cette inéquation est équivalente à $2(e^{2a} + 1) \geqslant (e^a + 1)^2$ , équivaut à $2e^{2a} + 2 \geqslant e^{2a} + 2e^a + 1$ , équivaut à $e^{2a} - 2e^a + 1 \geqslant 0$, équivaut à $(e^a - 1)^2 \geqslant 0$, ce qui est vérifié pour tout réel $a$. Donc, pour tout réel $a$, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}$ .

Tracé de C, (d), (d'), T :




EXERCICE 2 : 1. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ .

a) Montrons que $(u_n)$ est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Montrons que $(v_n)$ est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n(n+1)} \geqslant 0 \text{ si } n > 0.$$

Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ne sont pas adjacentes. On a tout de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, on conjecture que la limite de $(u_n)$ est $+\infty$.

2. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ .

a) Montrons que $(u_n)$ est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

Montrons que $(v_n)$ est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) =$

$\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1+n+1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2}$ qui est du signe du numérateur, donc $< 0$ .

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

b) La limite de $(u_n)$ est $\dfrac{\pi^2}{6} \simeq 1{,}645$.

3. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + e^{-n}$ et $v_n = 1 - e^{-n}$.

a) Montrons que $(u_n)$ est décroissante : pour tout entier naturel $n$,

$u_{n+1} - u_n = 1 + e^{-n-1} - (1 + e^{-n}) = e^{-n-1} - e^{-n} = e^{-n}(e^{-1} - 1) < 0$ puisque $e^{-1} - 1 \simeq -0{,}63$.

Montrons que $(v_n)$ est croissante : pour tout entier naturel $n$,

$v_{n+1} - v_n = 1 - e^{-n-1} - (1 - e^{-n}) = -e^{-n-1} + e^{-n} = e^{-n}(-e^{-1} + 1) > 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} 2e^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n} = 0$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.

Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (1+e^{-n}) = 1$.