EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}+$.
2. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}+$.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 - e^{-x}$.

a) Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
d) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{-u_n} - 2$.

a) Représenter les quatre premiers termes de la suite (u_n).
b) Conjecturer puis démontrer : variations, bornes et limite de (u_n).
c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite de (u_n).

EXERCICE 3

Pour tout entier naturel n, on considère le nombre complexe $z_n = (1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$.

1. Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de z_0 , z_1 , z_2 , z_3 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, z_n est imaginaire pur.
3. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $z_n = 0$.

EXERCICE 4

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M du plan, on associe le nombre complexe z.

1. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tel que $z\bar{z} = z + \bar{z}$.
2. Déterminer l'ensemble F des points M du plan tel que $\frac{z}{1+i}$ soit réel.
3. Déterminer l'ensemble G des points M du plan tel que $\frac{z}{1+i}$ soit imaginaire pur.
4. Déterminer l'intersection des ensembles E et F.