EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. La fonction f est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.

Il reste à étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{-1}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x}} = 0 = f(0)$;

donc la fonction f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$. Posons $X = \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} X = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; et $\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} = X e^{-X} = \frac{X}{e^X}$;

ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$, puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Ainsi, la fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. On sait que $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{x}} = 1$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}+$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}+$.

EXERCICE 2 : 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 - e^{-x}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut écrire $f(x) = e^{-x}(x e^x + 2 e^x - 1)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x e^x + 2e^x - 1) = -1$; de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

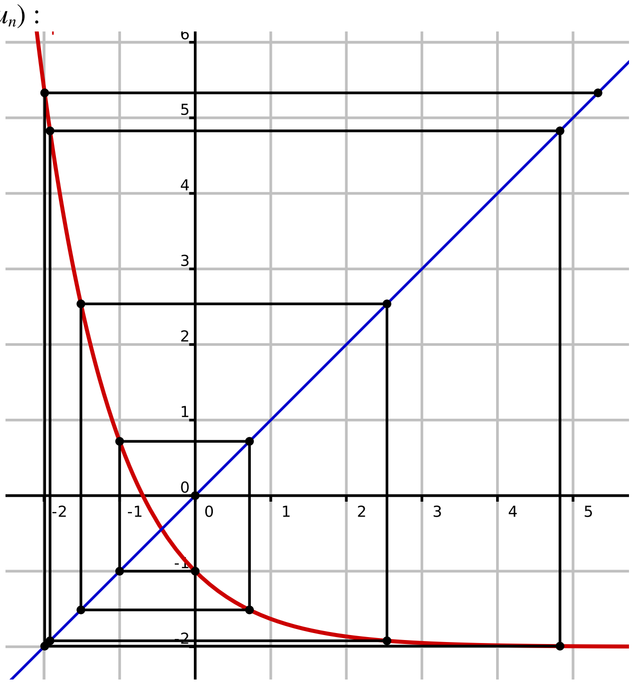
b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Et $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Et $0 \in \mathbb{R}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

d) On a $f(-1) = -1 + 2 - e = 1 - e \simeq -1{,}7$ et $f(0) = 2 - 1 = 1$, donc $-1 < \alpha < 0$; par encadrement successif, on trouve $-0{,}45 < \alpha < -0{,}44$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{-u_n} - 2$.

a) Représentation des quatre premiers termes de la suite (u_n) :



b) Conjectures : la suite (u_n) n'est pas monotone, elle diverge et est bornée par -2 et 6.

On pose $g(x) = e^{-x} - 2$. Pour tout réel x dans $[-2 ; 6]$, $-6 \leqslant -x \leqslant 2$, puis $e^{-6} \leqslant e^{-x} \leqslant e^2$, puis $e^{-6} - 2 \leqslant e^{-x} - 2 \leqslant e^2 - 2$, soit $e^{-6} - 2 \leqslant g(x) \leqslant e^2 - 2$.

$e^{-6} - 2 \simeq -1{,}997 > -2$, et $e^2 - 2 \simeq 5{,}39 < 6$.

Donc $-2 \leqslant g(x) \leqslant 6$. De plus, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on montre par récurrence que la suite (u_n) est bornée par -2 et 6 :

Initialisation : $u_0 = 0$ donc vraie.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $-2 \leqslant u_k \leqslant 6$.

Comme $u_{k+1} = g(u_k)$ et g décroissante, $g(6) \leqslant u_{k+1} \leqslant g(-2)$, soit $-2 \leqslant u_{k+1} \leqslant 6$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $-2 \leqslant u_n \leqslant 6$.

En fait, la suite (u_{2n}) est croissante et converge vers environ 5,4, et la suite (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers environ -2.

EXERCICE 3 : Pour tout entier naturel n, on considère le nombre complexe $z_n = (1 + i\sqrt{3}\ )^n - (1 - i\sqrt{3}\ )^n$.

1. $z_0 = (1 + i\sqrt{3}\ )^0 - (1 - i\sqrt{3}\ )^0 = 1 - 1 = 0$. $z_1 = (1 + i\sqrt{3}\ )^1 - (1 - i\sqrt{3}\ )^1 = 2\,i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$.

$z_2 = (1 + i\sqrt{3}\ )^2 - (1 - i\sqrt{3}\ )^2 = (1 + 2\,i\sqrt{3} - 3) - (1 - 2\,i\sqrt{3} - 3) = 4\,i\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$.

$z_3 = (1 + i\sqrt{3}\ )^3 - (1 - i\sqrt{3}\ )^3 = (1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3}\ ) - (1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3}\ ) = 0$.

2. On remarque que z_0 , z_1 , z_2 et z_3 sont imaginaires purs.
On utilise la propriété : Si un nombre complexe z vérifie $z + \overline{z} = 0$, alors z est imaginaire pur.
De plus, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Ici, $z_n + \overline{z_n} = (1 + i\sqrt{3}\ )^n - (1 - i\sqrt{3}\ )^n + (1 - i\sqrt{3}\ )^n - (1 + i\sqrt{3}\ )^n = 0$.
Donc z_n est imaginaire pur.

3. La forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$ est $= 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$;

d'où $(1 + i\sqrt{3}\ )^n = (2\,e^{i\frac{\pi}{3}})^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{3}}$.

De même, la forme trigonométrique de $1 - i\sqrt{3}$ est $= 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}) = 2\,e^{i\frac{-\pi}{3}}$;

d'où $(1 - i\sqrt{3}\ )^n = (2\,e^{i\frac{-\pi}{3}})^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{3}}$. Donc $z_n = 2^n e^{in\frac{\pi}{3}} - 2^n e^{-in\frac{\pi}{3}} = 2^n(e^{in\frac{\pi}{3}} - e^{-in\frac{\pi}{3}}) = 2^n\,2i\sin(\frac{n\pi}{3})$ par les

formules d'Euler. $z_n = 0$ équivaut à $2^{n+1}\sin(\frac{n\pi}{3}) = 0$ équivaut à $\sin(\frac{n\pi}{3}) = 0$ équivaut à

$\frac{n\pi}{3} = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, équivaut à $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc les valeurs de n pour lesquelles $z_n = 0$ sont les multiples de 3.

EXERCICE 4 : Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). A tout point M du plan, on associe le nombre complexe z.

1. On pose $z = x + iy$; $z\overline{z} = z + \overline{z}$ devient $(x + iy)(x - iy) = x + iy + x - iy = 2x$; on obtient $x^2 + y^2 = 2x$, soit $x^2 + y^2 - 2x = 0$, soit $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ qui est l'équation du cercle de centre D(1 ; 0) et de rayon 1. Donc l'ensemble E est le cercle de centre (1 ; 0) et de rayon 1.

2. $\frac{z}{1+i} = \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x+y+i(-x+y)}{2}$. Ce nombre complexe est réel si sa partie imaginaire est nulle, soit

$-x + y = 0$ ou $y = x$. Donc l'ensemble F des points M du plan tel que $\frac{z}{1+i}$ soit réel est la droite d'équation $y = x$.

3. $\frac{z}{1+i} = \frac{x+y+i(-x+y)}{2}$. Ce nombre complexe est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, soit $x + y = 0$ ou

$y = -x$. Donc l'ensemble G des points M du plan tel que $\frac{z}{1+i}$ soit imaginaire pur est la droite d'équation $y = -x$.

4. Pour déterminer l'intersection des ensembles E et F, on résout le système d'équations
$x^2 + y^2 = 2x$ et $y = x$. La première équation donne $x^2 + x^2 = 2x$,
soit $2x^2 = 2x$, soit $x^2 = x$, soit $x^2 - x = 0$, soit $x(x - 1) = 0$.
Il y a deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.
On trouve les ordonnées $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$.
Donc l'intersection des ensembles E et F est l'ensemble formé des deux points de coordonnées O(0 ; 0) et A(1, 1).