EXERCICE 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g_k(x) = k\sqrt{x}$ où k est un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) < g_1(x)$.
2. Montrer que l'inéquation $f(x) > g_{0,5}(x)$ admet un intervalle solution. Préciser les bornes de cet intervalle.
3. Déterminer un réel k tel que les courbes représentatives des fonctions f et g_k se coupent en un seul point et qu'elles aient la même tangente en ce point.

EXERCICE 2

On considère les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(1 + \dfrac{1}{x})$ et

$g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(1 + \dfrac{1}{x})$.

1. a) Étudier le signe des fonctions f et g sur $]0 ; +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \ln(1 + x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n+k}$.

a) A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, afficher les 10 premiers termes de la suite (v_n).

b) Conjecturer les variations et la convergence de (v_n).

c) Déduire de la question 1 que $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant v_n \leqslant \ln 2$.

d) Étudier la convergence de la suite (v_n).

EXERCICE 3

1. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) Déterminer la forme algébrique et exponentielle complexe de z^2.

b) En déduire la forme exponentielle complexe de z.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{8})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{8})$.

2. On considère le nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des réels positifs et $z^2 = \sqrt{3} + i$.

a) Déterminer la forme exponentielle complexe de z^2.

b) En déduire la forme exponentielle complexe de z.

c) Montrer x et y sont solutions du système $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=\sqrt{3} \\ 2xy=1 \end{cases}$.

d) En déduire la forme algébrique de z.

e) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.