CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 TERMINALE S 2

EXERCICE 1 : On considère les fonctions f et g définies sur]0 ; +∞ [par $f(x) = \ln x$ et $g_k(x) = k\sqrt{x}$ où k est un réel strictement positif.

1. Pour tout réel x strictement positif, $f(x) - g_1(x) = \ln x - \sqrt{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0 ; +∞[comme somme de fonctions qui le sont, et la dérivée est $\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$ qui est positif sur]0 ; 4],

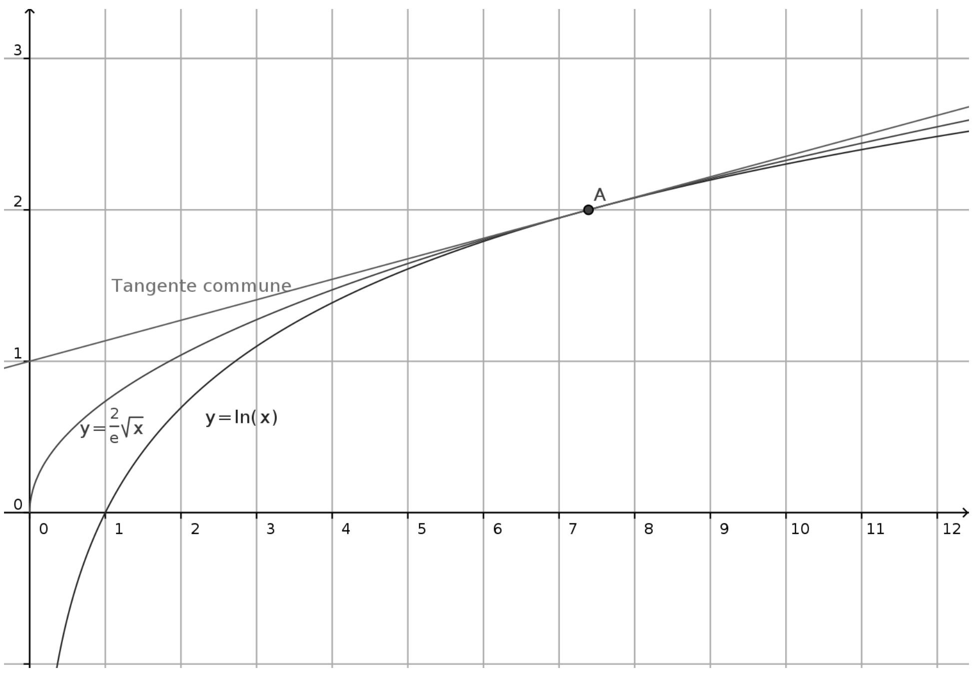
négatif sur]4 ; +∞[; donc la fonction est croissante sur]0 ; 4] et décroissante sur]4 ; +∞ [; elle admet donc un maximum en $x = 4$ qui vaut $f(4) - g_1(4) = \ln 4 - 2 = 2\ln 2 - 2 \simeq -0{,}6 < 0$, donc cette fonction est strictement négative sur]0 ; +∞ [et ainsi $f(x) < g_1(x)$.

2. Pour tout réel x strictement positif, $f(x) - g_{0,5}(x) = \ln x - 0{,}5\sqrt{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0; +∞[comme somme de fonctions qui le sont, et la dérivée est $\frac{1}{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{4x}$ qui est positif sur]0 ; 16], négatif sur]16 ; +∞[; donc la fonction est croissante sur]0 ; 16] et décroissante sur]16 ; +∞ [; elle admet donc un maximum en $x = 16$ qui vaut f(16) – g0,5 (16) = ln 16 – 2 = 4ln2 – 2 ≃ 0,8 > 0 ; de plus, pour tout réel x de]0 ;+∞[,
$f(x) - g_{0,5}(x) = \ln x - 0{,}5\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{x}\left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g_{0,5}(x)) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) - g_{0,5}(x)) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} g_{0,5}(x) = 0$.
Ainsi, la fonction $x \to f(x) - g_{0,5}(x)$ est continue car dérivable et strictement croissante de]0 ; 16] dans]–∞ ; 4 ln2 – 2], et 0 ∈]–∞ ; 4 ln2 – 2], donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans]0 ; 16] tel que $f(\alpha) - g_{0,5}(\alpha) = 0$; de même, la fonction $x \to f(x) - g_{0,5}(x)$ est continue car dérivable et strictement décroissante de]16 ; +∞ [dans]–∞ ; 4 ln2 – 2], et 0 ∈]–∞ ; 4 ln2 – 2], donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel β dans]16 ; +∞ [tel que $f(\beta) - g_{0,5}(\beta) = 0$; à l'aide des variations de $f - g_{0,5}$, on trouve que cette fonction est positive sur [α ; β], donc que l'inéquation $f(x) > g_{0,5}(x)$ admet l'intervalle solution [α ; β]. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 2{,}04$ et $\beta \simeq 74{,}19$.

3. Pour déterminer un réel k tel que les courbes représentatives des fonctions f et g_k se coupent en un seul point et qu'elles aient la même tangente en ce point, on doit trouver un réel a tel que $f(a) = g_k(a)$, soit $\ln a = k\sqrt{a}$; et tel que $f'(a) = g_k'(a)$, soit $\frac{1}{a} = k\frac{1}{2\sqrt{a}}$ implique $\frac{2}{2a} = \frac{k\sqrt{a}}{2a}$ implique $2 = k\sqrt{a}$ implique $a = \frac{4}{k^2}$ et $k \neq 0$.

On remplace cette valeur dans $f(a) = g_k(a)$, on trouve $\ln\frac{4}{k^2} = k\frac{2}{k}$, soit $\ln 4 - \ln(k^2) = 2$, soit $2\ln(k) = 2\ln 2 - 2$,

soit $\ln(k) = \ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{2}{e}\right)$, soit $k = \frac{2}{e}$. On trouve alors $a = \frac{4}{k^2} = e^2$. Le point d'intersection des deux courbes est alors A(e^2 ; $\ln(e^2)$), soit A(e^2 ; 2).



EXERCICE 2 : On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+\dfrac{1}{x})$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(1+\dfrac{1}{x})$. On peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(\dfrac{x+1}{x}) = \dfrac{1}{1+x} - \ln(x+1) + \ln(x)$;

de même $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(1+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$.

1. a) Pour étudier le signe des fonctions f et g sur $]0\,;+\infty[$, on étudie leurs variations :

Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont ;

$f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x-x(1+x)+(1+x)^2}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x(1+x)^2} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; donc la fonction f est strictement négative sur $]0\,;+\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-(1+x)-x^2+x(1+x)}{x^2(1+x)} = \dfrac{-1}{x^2(1+x)} < 0$ sur $]0\,;+\infty[$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; donc la fonction g est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

b) Pour tout réel x strictement positif, $f(x) < 0$, donc $\dfrac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x)$;

$g(x) > 0$, donc $\dfrac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln(x)$; ainsi, pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n+k}$.

a) A l'aide d'un tableur, affichage des 10 premiers termes de la suite (v_n) :

n	v_n
1	0,5
2	0,58333333
3	0,61666667
4	0,63452381
5	0,64563492
6	0,65321068
7	0,65870518
8	0,66287185
9	0,66613982
10	0,66877140
11	0,67093591
12	0,67274750
13	0,67428596
14	0,67560871
15	0,67675814
16	0,67776620
17	0,67865747
18	0,67945112
19	0,68016236
20	0,68080338

b) Conjecture : la suite (v_n) semble croissante et converger vers un réel $\simeq 0{,}7$.

c) D'après la question 1, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(1+n) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n+2} \leqslant \ln(2+n) - \ln(1+n) \leqslant \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{n+3} \leqslant \ln(3+n) - \ln(2+n) \leqslant \frac{1}{n+2}$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{2n} \leqslant \ln(2n) - \ln(2n-1) \leqslant \frac{1}{2n-1}$$
$$\frac{1}{2n+1} \leqslant \ln(2n+1) - \ln(2n) \leqslant \frac{1}{2n}.$$

En faisant la somme des n premières lignes avec l'inégalité de gauche, on trouve que

$v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \leqslant \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2$.

En faisant la somme des n dernières lignes avec l'inégalité de droite, on trouve que

$\ln(2n+1) - \ln(1+n) \leqslant v_n$, d'où $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant v_n$. Ainsi $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant v_n \leqslant \ln 2$.

d) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$.

EXERCICE 3 : 1. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

a) On a $z^2 = (\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}})^2 = 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2}(1+i)$.

Le module de z^2 est égal à $2\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 4$ et un argument est égal à $\dfrac{\pi}{4}$. D'où $z^2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) On en déduit la forme exponentielle complexe de z : $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{8}}$. (La solution $-2\,e^{i\frac{\pi}{8}}$ n'est pas retenu, car la partie réelle et la partie imaginaire de z sont positives).

c) On en déduit les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$, puisque $z = 2(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$;

il vient $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. On considère le nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont des réels positifs et $z^2 = \sqrt{3} + i$.

a) Le module de z^2 est égal à $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ et un argument θ vérifie $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$;

soit $\theta = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. La forme exponentielle complexe de z^2 est $2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) On en déduit la forme exponentielle complexe de $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c) Si $z = x + iy$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. La partie réelle de z^2 est $x^2 - y^2 = \sqrt{3}$ et la partie imaginaire est $2xy = 1$;

le module de $z^2 = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2 = 2$. D'où le système $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=\sqrt{3} \\ 2xy=1 \end{cases}$.

d) En faisant la somme des deux premières équations, on obtient $2x^2 = 2 + \sqrt{3}$, soit $x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, et $x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$;

En faisant la différence des deux premières équations, on obtient $2y^2 = 2 - \sqrt{3}$, soit $y^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, et $y = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

La forme algébrique de z est $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. En fait, $2(2+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^2$; et $2(2-\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3})^2$;

donc $2+\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$, d'où $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; de même $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ et $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

e) On en déduit les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$:

$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.