

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, et on considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+i\bar{z}}{2}$.

1. Montrer que l'ensemble (d) des points M dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$ est une droite.
2. Montrer que le nombre $\frac{z'-z}{1-i}$ est réel.
3. En déduire que M' appartient à la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}-\vec{v}$.
4. Montrer que pour tout point M du plan, $f(f(M)) = f(M') = M'$.
5. Déduire des questions précédentes que M' est le point d'intersection des deux droites (d) et Δ .
6. Caractériser géométriquement l'application f .

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives $1, -1, z$ et z^2 avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que le triangle AMM' est rectangle en M .
2. Trouver l'ensemble (F) des points M du plan tel que le triangle AMM' est équilatéral.
3. Trouver l'ensemble (G) des points M du plan tel que le point M' soit sur le segment $[AM]$.

EXERCICE 3

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (en heure) dans son organisme. On admet que f satisfait l'équation différentielle $f'(t) = ae^{-t} - f(t)$ et $f(0) = 0$ (a est une constante positive dépendant de la personne et de la quantité absorbée).

On pose $g(t) = e^t f(t)$.

1. a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction g .
b) En déduire $g(t)$ puis $f(t)$ en fonction de t .
2. On suppose que $a = 5$.
a) Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.
b) Au bout de combien de temps la personne peut-elle prendre le volant sans enfreindre la législation (le taux maximal autorisé est de $0,5 \text{ g/L}$) ?
3. Déterminer a pour qu'une personne ayant atteint un taux d'alcoolémie de 2 g/L et devenant sobre, descende en-dessous du taux maximal autorisé en 12 heures.