CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 7 TERMINALE S 2

EXERCICE 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) , et on considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z+i\bar{z}}{2}$.

1. On a $f(z) = z$ équivaut à $z=\frac{z+i\bar{z}}{2}$ équivaut à $2z = z + i\bar{z}$ équivaut à $z = i\bar{z}$; en posant $z = x + iy$, on obtient $x + iy = i(x - iy)$ équivaut à $x - y + i(y - x) = 0$. Un nombre complexe est nul si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles ; soit $x - y = 0$ et $y - x = 0$ qui est l'équation de la droite première bissectrice du repère. L'ensemble (d) des points M dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$ est la droite d'équation $y = x$.

2. Pour tout nombre complexe z, on a $\frac{z'-z}{1-i} = \frac{\frac{z+i\bar{z}}{2}-z}{1-i} = \frac{z+i\bar{z}-2z}{2(1-i)} = \frac{-z+i\bar{z}}{2(1-i)} = \frac{-(x+iy)+i(x-iy)}{2(1-i)} =$ $\frac{-x+y+i(x-y)}{2(1-i)} = \frac{(-x+y)(1-i)}{2(1-i)} = \frac{-x+y}{2}$ qui est un nombre réel.

3. Pour tout nombre complexe z, on a $\arg\left(\frac{z'-z}{1-i}\right) = (\vec{u}-\vec{v}\ ;\ \overrightarrow{MM'}) = 0\ [\pi]$ d'après la question précédente. Donc les vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires. Donc M' appartient à la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}-\vec{v}$.

4. $f(f(\text{M})) = f(\text{M}')$ a pour affixe $z''=\frac{z'+i\overline{z'}}{2} = \frac{\frac{z+i\bar{z}}{2}+i\frac{\bar{z}-iz}{2}}{2} = \frac{z+i\bar{z}+i(\bar{z}-iz)}{4} = \frac{2z+2i\bar{z}}{4} = \frac{z+i\bar{z}}{2}$ qui est l'affixe de M' ; donc pour tout point M du plan, $f(f(\text{M})) = f(\text{M}') = \text{M}'$.

5. Comme $f(\text{M}') = \text{M}'$, le point M' est un point invariant de f, il est donc sur la droite (d). Ainsi, M' est le point d'intersection des deux droites (d) et Δ.

6. L'application f est la projection orthogonale de M sur la droite (d).

EXERCICE 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives 1, – 1, z et z^2 avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Le triangle AMM' est rectangle en M équivaut à $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à $\arg\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à $\arg\left(\frac{z(z-1)}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à $\arg(-z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ équivaut à z est un imaginaire pur équivaut à M est sur l'axe des ordonnées. Donc l'ensemble (E) est l'axe des ordonnées.

2. Le triangle AMM' est équilatéral équivaut à MM' = MA et $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MM'}) = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et M distinct de A équivaut à $\left|\frac{z^2-z}{1-z}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right) = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ équivaut à $\frac{z^2-z}{1-z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$; soit $-z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$; soit $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Donc l'ensemble (F) est composée des deux points d'affixes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3. Le point M' est sur le segment [AM] équivaut à $(\overrightarrow{M'A}\ ;\ \overrightarrow{M'M}) = \pi\ [2\pi]$ et M distinct de A équivaut à $\arg\left(\frac{z-z^2}{1-z^2}\right) = \pi\ [2\pi]$ équivaut à $\arg\left(\frac{z}{1+z}\right) = \arg\left(\frac{z-0}{z-(-1)}\right) = \pi\ [2\pi]$ équivaut à $(\overrightarrow{BM}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \pi\ [2\pi]$ équivaut à $(\overrightarrow{MB}\ ;\ \overrightarrow{MO}) = \pi\ [2\pi]$; soit le point M est sur le segment [OB] y compris les points O et B. Donc l'ensemble (G) des points M du plan tel que le point M' soit sur le segment [AM] est le segment [OB].

EXERCICE 3 : Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certaine quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (en heure) dans son organisme. On admet que f satisfait l'équation différentielle $f'(t) = ae^{-t} - f(t)$ et $f(0) = 0$ (a est une constante positive dépendant de la personne et de la quantité absorbée). On pose $g(t) = e^{t} f(t)$.

1. a) L'équation différentielle vérifiée par la fonction g : on a $g'(t) = e^{t} f(t) + e^{t} f'(t) = e^{t} f(t) + e^{t}(ae^{-t} - f(t)) = a$; donc la fonction g est de la forme $at + b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

b) On a $g(t) = at + b$ puis $f(t) = (at + b)e^{-t}$. Comme $f(0) = 0$, on trouve $f(0) = be^{0} = 0$, soit $b = 0$.
Ainsi $f(t) = (at)e^{-t}$.

2. On suppose que $a = 5$.

a) Pour déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint, on étudie les variations de la fonction f : $f'(t) = 5e^{-t} - f(t) = 5e^{-t} - (5t)e^{-t} = 5(1-t)e^{-t}$ qui s'annule pour $t = 1$. La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$. Elle admet donc un maximum atteint en $x = 1$ qui vaut $f(1) = 5e^{-1} \simeq 1{,}84$.

b) La personne peut prendre le volant sans enfreindre la législation au bout d'un temps α tel que $f(\alpha) = 5\alpha e^{-\alpha} < 0{,}5$ soit $\alpha e^{-\alpha} < 0{,}1$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 3{,}58$ soit 3 heures et 35 minutes.

3. Déterminer a pour qu'une personne ayant atteint un taux d'alcoolémie de 2g/L et devenant sobre, descende en-dessous du taux maximal autorisé en 12 heures. On pose t le moment où la personne atteint un taux d'alcoolémie de 2g/L. On a alors $f(t) = 2$ et $f(t + 12) = 0{,}5$. Ainsi $(at)e^{-t} = 2$ et $a(t + 12)e^{-(t+12)} = 0{,}5$.

$(at + 12a)e^{-t-12} = 0{,}5$ soit $(at + 12a)e^{-t} \times e^{-12} = 0{,}5$ soit $(at + 12a)e^{-t} = 0{,}5e^{12}$ soit $ate^{-t} + 12ae^{-t} = 0{,}5e^{12}$ soit $12ae^{-t} = 0{,}5e^{12} - 2$ soit $ae^{-t} = \dfrac{0{,}5e^{12} - 2}{12}$. Comme $(at)e^{-t} = 2$, alors $ae^{-t} = \dfrac{2}{t} = \dfrac{0{,}5e^{12} - 2}{12}$,

d'où $t = \dfrac{24}{0{,}5e^{12} - 2} \simeq 0{,}00029$ et $a = \dfrac{2}{t}e^{t} \simeq 6781$.