DEVOIR MAISON N ° 8 TERMINALE S 2 MARS 2011

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2-\ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$.

4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_1=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

   $$I_{p+1}=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p.$$

   c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4.

   d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Exercice 3

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\ )$ et le point A d'affixe 4.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{4}$.

1. Construire les points $B_0=r(A)$, $A_1=h(B_0)$, $B_1=r(A_1)$, $A_2=h(B_1)$, $B_2=r(A_2)$.

2. Préciser les affixes de ces points.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $B_n = r(A_n)$ et $A_{n+1} = h(B_n)$ et z_n l'affixe du point A_n.

a) Déterminer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Déterminer la distance $\mathrm{O}A_{n+1}$ en fonction de $\mathrm{O}A_n$ puis écrire $\mathrm{O}A_n$ en fonction de n.

c) En déduire $A_{n+1}A_n$ en fonction de $\mathrm{O}A_n$.

4. Déterminer la longueur l_n de la ligne polygonale $\mathrm{A}A_1A_2A_3....A_n$.

5. Etudier la convergence de la suite (l_n).

6. Pour quelles valeurs de n, le point A_n est-il sur l'axe des abscisses ?