Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2-\ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$.

4. On pose pour $p\geqslant 1, I_p=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_1=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

   $$I_{p+1}=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p.$$

   c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4.

   d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Exercice 3

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\ )$ et le point A d'affixe 4.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{4}$.

1. Construire les points $B_0=r(A)$, $A_1=h(B_0)$, $B_1=r(A_1)$, $A_2=h(B_1)$, $B_2=r(A_2)$.

2. Préciser les affixes de ces points.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $B_n = r(A_n)$ et $A_{n+1} = h(B_n)$ et z_n l'affixe du point A_n.

a) Déterminer z_{n+1} en fonction de z_n.

b) Déterminer la distance $\mathrm{O}A_{n+1}$ en fonction de $\mathrm{O}A_n$ puis écrire $\mathrm{O}A_n$ en fonction de n.

c) En déduire $A_{n+1}A_n$ en fonction de $\mathrm{O}A_n$.

4. Déterminer la longueur l_n de la ligne polygonale $\mathrm{A}A_1A_2A_3....A_n$.

5. Etudier la convergence de la suite (l_n).

6. Pour quelles valeurs de n, le point A_n est-il sur l'axe des abscisses ?

CORRIGÉ DEVOIR MAISON N ° 8 TERMINALE S 2

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

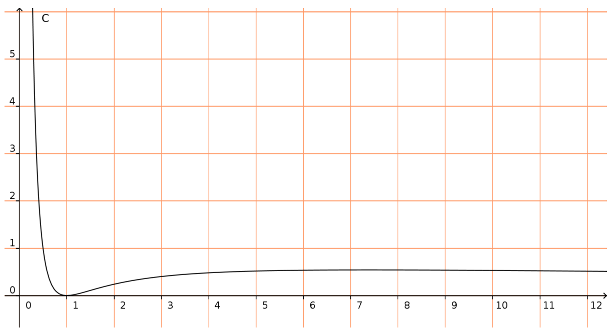
1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$. On pose $x=X^2$, d'où $(\ln x)^2=(\ln(X^2))^2=4(\ln X)^2$ et $f(x)=\frac{4(\ln X)^2}{X^2}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{4(\ln X)^2}{X^2}=\lim\limits_{X\to+\infty}4(\frac{\ln X}{X})^2=0$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont; et $f'(x)=\frac{(2\frac{1}{x}\ln x)x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$. Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2-\ln x)$. On a $\ln x=0$ pour $x=1$ et $2-\ln x=0$ pour $x=\mathrm{e}^2$. On obtient le tableau de signes et de variations sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction f est croissante sur $[1;\ \mathrm{e}^2]$ et décroissante sur $]0;\ 1]$ et sur $[\mathrm{e}^2;\ +\infty[$.

3. La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$:



4. On pose pour $p\geqslant 1$, $I_p=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   a. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\frac{1}{x^2}$; $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\frac{-1}{x}$.
   Ainsi
   $I_1=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=[\frac{-1}{x}\ln x]_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{-1}{x^2}\,dx=\frac{-2}{\mathrm{e}^2}-[\frac{1}{x}]_1^{\mathrm{e}^2}=\frac{-2}{\mathrm{e}^2}-\frac{1}{\mathrm{e}^2}+1=\frac{-3}{\mathrm{e}^2}+1.$

   b. Pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : on pose $u(x)=(\ln x)^{p+1}$ et $v'(x)=\frac{1}{x^2}$; $u'(x)=\frac{p+1}{x}(\ln x)^p$ et $v(x)=\frac{-1}{x}$

   $$I_{p+1}=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{(\ln x)^{p+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-(\ln x)^{p+1}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{-(p+1)}{x^2}\frac{(\ln x)^p}{}\,\mathrm{d}x=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{(p+1)}{x^2}\frac{(\ln x)^p}{}\,\mathrm{d}x=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p.$$

   c. Ainsi $I_2=-\frac{2^2}{e^2}+2I_1=-\frac{2^2}{e^2}+2\left(\frac{-3}{\mathrm{e}^2}+1\right)=\frac{-10}{\mathrm{e}^2}+2.$

$$I_3 = -\frac{2^3}{e^2} + 3I_2 = -\frac{8}{e^2} + 3\left(\frac{-10}{e^2} + 2\right) = \frac{-38}{e^2} + 6.$$

$$I_4 = -\frac{2^4}{e^2} + 4I_3 = -\frac{16}{e^2} + 4\left(\frac{-38}{e^2} + 6\right) = \frac{-168}{e^2} + 24.$$

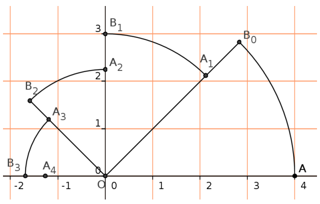
d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Le volume du solide ainsi engendré est égal à $\int_1^{e^2} \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi I_4 = \left(\frac{-168}{e^2} + 24\right)\pi \simeq 3,97$ unités de volume.

<u>Exercice 2</u>

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$ et le point A d'affixe 4.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{4}$.

1. Construction des points $B_0 = r(A)$, $A_1 = h(B_0)$, $B_1 = r(A_1)$, $A_2 = h(B_1)$, $B_2 = r(A_2)$:



2. Les affixes de ces points : l'écriture complexe de r est : $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$ et l'écriture complexe de h est $z' = \frac{3}{4}z$. Ainsi $z_{B_0} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times 4 = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})4 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$; $z_{A_1} = \frac{3}{4}(2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$. $z_{B_1} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 3i$; $z_{A_2} = \frac{3}{4}(3i) = \frac{9i}{4}$; $z_{B_2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(\frac{9i}{4}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})\left(\frac{9i}{4}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{8}(-1 + i)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note $B_n = r(A_n)$ et$A_{n+1} = h(B_n)$ et $z_n\, l'$affixe du point A_n.

a) Soit z_{B_n} l'affixe du point B_n; alors $z_{n+1} = \frac{3}{4}z_{B_n} = \frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}z_n$.

b) La distance $\mathrm{O}A_{n+1} = |z_{n+1}| = |\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}z_n| = |\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}||z_n| = \frac{3}{4}\mathrm{OA}_n$. Donc la suite donnant la distance OA_n est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc $\mathrm{OA}_n = \mathrm{OA} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c) On a $A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = |\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}z_n - z_n| = |z_n\left(\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right)| = |z_n||\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1| = \mathrm{OA}_n|\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1| = \mathrm{OA}_n|\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1| = \mathrm{OA}_n|\frac{3\sqrt{2}}{8} - 1 + i\frac{3\sqrt{2}}{8}| = \mathrm{OA}_n\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3\sqrt{2}}{4}}$.

4. La longueur l_n de la ligne polygonale $\mathrm{A}A_1A_2A_3\ldots.A_n$ est égale à la somme des longueurs $A_{n+1}A_n$ pour n variant de 0 à $n-1$, soit $\sum_{k=0}^{k=n-1} A_{n+1}A_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{12\sqrt{2}}{16}} = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n\sqrt{25 - 12\sqrt{2}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}}\sqrt{25 - 12\sqrt{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$.

5. Comme la raison de la suite (OA_n) est strictement comprise entre -1 et 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 4\sqrt{25 - 12\sqrt{2}} \simeq 11,33$.

6. Le point A_n est sur l'axe des abscisses si son affixe z_n est un nombre réel, soit $\arg(z_n) = 0\,[\pi]$; or $\arg(z_{n+1}) = \arg(\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}z_n) = \frac{\pi}{4} + \arg(z_n)\,[2\pi]$. Donc la suite $(\arg(z_n))$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $\arg(z_A) = \arg(4) = 0$. Donc $\arg(z_n) = n \times \frac{\pi}{4} = \frac{n\pi}{4}$. A_n est sur l'axe des abscisses si $\frac{n\pi}{4} = 0\,[\pi]$, $\frac{n\pi}{4} = k\pi$ soit $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.