EXERCICE 1 : Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode précisé dans chaque question.
1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

Il s'agit de combinaisons (tirages non ordonnés). Le nombre de tirages possibles est $\binom{20}{10} = 184756$.

a. Probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur :
Cela signifie que l'on a choisi les 10 boules blanches ou les 10 boules noires parmi les 20 boules pour l'urne A.
Il y a deux possibilités. Donc la probabilité est égale à $\frac{2}{184756} = \frac{1}{92378}$.

b. Probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires :
Cela signifie que l'on a choisi les 5 boules blanches et 5 boules noires parmi les 20 boules pour l'urne A.
Il y a $\binom{10}{5}^2 = 252^2 = 63504$ possibilités. Donc la probabilité est égale à $\frac{63504}{184756} = \frac{15876}{46189}$.

2. Soit $x$ un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant $x$ boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et $x$ boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E :
On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question a., on prend $x = 6$. On a 6 boules blanches et 4 boules noires dans l'urne A et 4 boules blanches et 6 boules noires dans l'urne B. Il y a deux possibilités : on tire une boule blanche de l'urne A avec une probabilité de $\frac{4}{10}$, puis on tire une boule blanche de l'urne B avec une probabilité de $\frac{7}{11}$ ; ou on tire une boule noire de l'urne A avec une probabilité de $\frac{6}{10}$, puis on tire une boule noire de l'urne B avec une probabilité de $\frac{5}{11}$. Donc la probabilité de l'évènement M est égale à $\frac{4}{10} \times \frac{7}{11} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{11} = \frac{58}{110} = \frac{29}{55}$.

b. Dans le cas général, la probabilité de l'évènement M est égale à $\frac{x}{10} \times \frac{11-x}{11} + \frac{10-x}{10} \times \frac{x+1}{11} =$
$\frac{11x - x^2 + 10x + 10 - x^2 - x}{110} = \frac{-2x^2 + 20x + 10}{110} = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.

c. L'évènement M est plus probable que l'évènement contraire $\overline{\mathrm{M}}$ si $p(\mathrm{M}) \geqslant p(\overline{\mathrm{M}}) = 1 - p(\mathrm{M})$, soit $p(\mathrm{M}) \geqslant \frac{1}{2}$,
soit $\frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5) \geqslant \frac{1}{2}$, soit $-x^2 + 10x + 5 \geqslant \frac{55}{2}$, soit $-x^2 + 10x - \frac{45}{2} \geqslant 0$.
Le discriminant $= 10^2 - 4(-1)(-\frac{45}{2}) = 10$ ; il y a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-10+\sqrt{10}}{-2} = \frac{10-\sqrt{10}}{2} \simeq 3{,}41$ et
$x_2 = \frac{-10-\sqrt{10}}{-2} = \frac{10+\sqrt{10}}{2} \simeq 6{,}58$. Or $x$ est un entier, donc la solution est S = {4; 5 ; 6}.

EXERCICE 2 : Par la formule du binôme, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout entier naturel $n$, on sait que
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx$ puisque $x \geqslant 0$ et $\binom{n}{k} > 1$.
On dispose de $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On les dispose dans $n$ boîtes (chaque boîte pouvant contenir de 0 à $n$ boules). On désigne par $\mathrm{P}_n$ la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
Pour la boîte 1, il y a $n$ choix possibles de boules, donc une probabilité de $\frac{1}{n}$ ; même probabilité pour les autres boîtes, donc une probabilité de $\frac{1}{n^n}$ de mettre une boule par boîte. Il y a ensuite $n!$ permutations des $n$ boules dans les $n$ boîtes, donc $\mathrm{P}_n = \frac{n!}{n^n}$.
Pour tout entier naturel non nul $n$, $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \; \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \times n^n} = \frac{n!(n+1) \times (n+1)^n}{(n+1)n! \times n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} =$
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. En posant $x = \frac{1}{n}$ et en utilisant la première question, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{1}{n} = 2$. Donc $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n+1}} \geqslant 2$.

Montrons par récurrence que $P_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ :

Initialisation : $P_1$ est la probabilité qu'une boîte contienne une boule est égale à $1 \leqslant \frac{1}{2^{1-1}} = 1$. Vrai.

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel $n$ tel que $P_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Montrons que $P_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$ :

On sait que $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geqslant 2$, donc $\frac{P_{n+1}}{P_n} \leqslant \frac{1}{2}$, donc $P_{n+1} \leqslant \frac{P_n}{2} \leqslant \frac{1}{2\times 2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$ non nul, $P_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

EXERCICE 3 : Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - x^2\ln x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
On note C la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

1. On peut écrire $f(x) = x - x^2\ln x = x(1 - x\ln x)$. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x\ln x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc la fonction $f$ est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1 - x\ln x) = 1$ ; donc la fonction $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

2. La fonction $f$ est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont ;
$f'(x) = 1 - (2x\ln x + x^2\frac{1}{x}) = 1 - x - 2x\ln x$. On dérive une seconde fois : $f''(x) = -1 - (2\ln x + 2x\frac{1}{x}) = -3 - 2\ln x$.

On a $f''(x) \geqslant 0$ pour $-3 - 2\ln x \geqslant 0$, soit $\ln x \leqslant \frac{-3}{2}$, soit $x \leqslant e^{\frac{-3}{2}}$. Donc $f'$ est croissante sur $[0\ ; e^{\frac{-3}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{-3}{2}}\ ;+\infty[$ ; $f'$ admet donc un maximum en $x = e^{\frac{-3}{2}}$ qui vaut

$f'(e^{\frac{-3}{2}}) = 1 - e^{\frac{-3}{2}} - 2e^{\frac{-3}{2}}\ln(e^{\frac{-3}{2}}) = 1 - e^{\frac{-3}{2}} - 2e^{\frac{-3}{2}} \times \frac{-3}{2} = 1 + 2e^{\frac{-3}{2}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = -\infty$. Sur $[0\ ; e^{\frac{-3}{2}}]$, $f'(x)$ est strictement positive ; sur $[e^{\frac{-3}{2}}\ ;+\infty[$, $f'$ est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[1 + 2e^{\frac{-3}{2}}\ ;-\infty[$ qui contient 0 ; donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution dans $[e^{\frac{-3}{2}}\ ;+\infty[$. Comme $f'(1) = 0$, 1 est la seule solution de $f'(x) = 0$. Donc $f'(x)$ est positive sur $[0\ ;1]$ et négative sur $[1\ ;+\infty[$. Ainsi la fonction $f$ est croissante sur $[0\ ;1]$, décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.
Le tableau de variations de $f$ sur $[0\ ;+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3. a) En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient $u_{n+1} - u_n =$
$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx$.

D'après le tableau de variations de la fonction $f$, $f(x)$ est positif sur $[0\ ;1]$, donc sur $[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}]$, donc $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx$ est positif, et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_n$, et la suite $(u_n)$ est croissante.

b) On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$ ; d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$ ;

donc $\int_{\frac{1}{n}}^{1} (x^2\ln x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx = 0 - \frac{1}{3n^3}\ln\frac{1}{n} - \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^2}{3}dx = \frac{\ln n}{3n^3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9n^3}$.

D'où $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x\,dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1}(x^2\ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left(\frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3} + \frac{1}{9} =$
$\frac{11}{18} - \frac{1}{2n^2} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3}$.

Interprétation graphique : c'est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

c) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{9n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{3n^3} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{11}{18}$. Donc la suite $(u_n)$ converge vers $\frac{11}{18}$

Interprétation graphique : c'est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.