

EXERCICE 1 (Bac Inde avril 2010)**4 points**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - 10,5$.
a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

EXERCICE 2 (Bac France septembre 2010)**5 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n , par : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$, alors on a, pour tout nombre entier

naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. On donne à la fin de l'exercice (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative C de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
b) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b).
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n . Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
b) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 3 (d'après Bac Amérique du Nord 2005)**7 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$.

et \mathcal{C}_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. a) Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Vérifier que : $f(x) = (x-2)\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$.
c) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à \mathcal{C}_f .
d) Étudier la position relative de \mathcal{C}_f et Δ .
2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(1+x^2)^2}$.
b) En déduire le signe de $f'(x)$ établir le tableau de variations complet de f .
3. Montrer que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution que l'on notera α dans \mathbb{R} . Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

4. a) Déterminer les abscisses des points A et B de \mathcal{C}_f en lesquels la tangente à la courbe \mathcal{C}_f est parallèle à Δ . A sera le point d'abscisse négative.
- b) Donner l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point D d'abscisse 2.
- c) Tracer la droite Δ , les trois tangentes précédentes ainsi que les tangentes horizontales et la courbe \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
- d) Montrer que la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ a pour valeur approchée 3 cm à 10^{-2} près.

Rappel de 1°S :

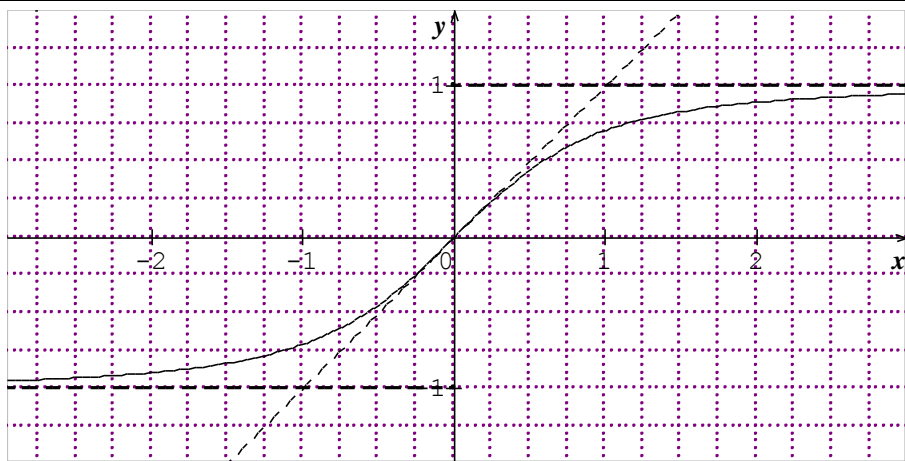
La distance d'un point $M_0(x_0 ; y_0)$ à la droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule : $d(M_0 ; \Delta) =$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

EXERCICE 4 (concours FESIC 2010)

4 points

L'exercice suivant comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F). Toute bonne réponse rapporte 1 point, toute erreur coûte 1 point. L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point. Au pire cet exercice ne rapporte aucun point (il n'y a pas de notation négative pour un exercice).



On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

On appelle Γ la courbe représentant f et \mathcal{C} la courbe représentant la fonction dérivée f' de f . On a représenté ci-dessus la courbe \mathcal{C} de f' . On y remarque que :

- \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La droite d'équation $y = x$ est la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- A) La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- B) La courbe Γ de f possède une et une seule tangente parallèle à (Ox) .
- C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- D) On a $f''(0) = 1$.

Schéma de l'EXERCICE 2

