EXERCICE 1 5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-z_I}{z-a}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x-z_I}{x-a}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$; donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. a. Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de r_1 .

4. Soit A′ , B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a' , b' et c' leurs affixes.
Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 6 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par AM = $\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0 ; +\infty[$.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que AP = $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

EXERCICE 3 3 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$t_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

Proposition 2 : Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

Proposition 3 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

EXERCICE 4 7 points

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10} u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par $f(x) = \dfrac{1}{10} x(20 - x)$.

a. Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

c. On donne en annexe la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E) ; $y' = \dfrac{1}{20} y(10 - y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

(E_1) $\quad z' = -\dfrac{1}{2} z + \dfrac{1}{20}$.

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{\frac{-1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

ANNEXE