EXERCICE 1 : 1. $AB^2 = |b - a|^2 = |2 + i|^2 = 4 + 1 = 5$;

$AC^2 = |c - a|^2 = |1 + 2\,i|^2 = 1 + 4 = 5$.

$AB^2 = AC^2 \iff AB = AC \iff$ ABC est isocèle en A.

2. $z_I = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\,i$.

a) $\dfrac{z - z_I}{z - a}$ est un réel si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z - z_I}{z - a}\right) = 0\ [\pi] \iff (\overrightarrow{AM}\ ,\ \overrightarrow{IM}) = 0\ [\pi]$, ce qui signifie que les points A, I et M sont alignés.

Les points M appartiennent donc à la droite (IA) privée du point A.

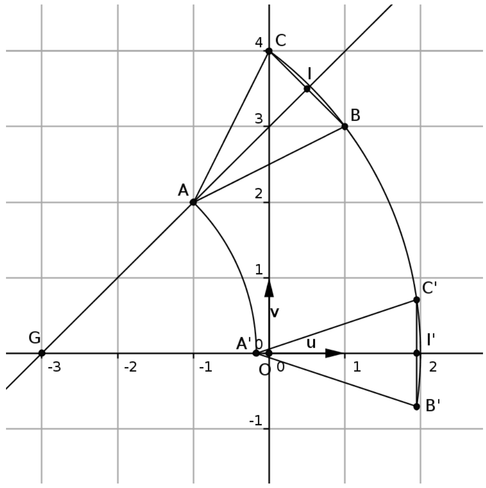
b) D'après la question précédente le réel solution est l'abscisse du point commun à la droite (AI) et à l'axe des abscisses. L'équation de la droite (AI) est $y = x + 3$, donc $y = 0$ entraîne $x = -3$.

c) $z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\,i + 1 - 2i = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,i$.

On a $AI^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{18}{4}$. Donc $AI = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

On peut donc écrire $z_{\overrightarrow{AI}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$



3. a) Le point G a pour abscisse le réel solution de la question précédente.

C'est donc un point de la droite (AI) contenant le sommet principal A et le milieu du côté opposé du triangle isocèle. Cette droite (AI) est donc hauteur, médiane, médiatrice et axe de symétrie du triangle ABC.

On a vu que l'équation de (AI) est $y = x + 3$; le coefficient directeur de cette droite est égal à 1, ce qui correspond à un angle $(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AI})$ de $\dfrac{\pi}{4}$,

Il existe donc deux rotations de centre G qui transforment A et I en deux points de l'axe des réels :

La rotation r_1 d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$; et la rotation r_2 d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

r_1 est bien la première rotation de la question précédente.

Son écriture complexe est : $z' - z_G = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_G)$ soit $z' - (-3) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (-3))$ soit $z' = -3 + e^{i\frac{\pi}{4}}(z + 3)$.

b) Une rotation conserve les longueurs et les angles ; donc l'image de (AI) , axe de symétrie de (ABC) est l'axe de symétrie de A′ B′ C′ soit (A′I′) .

Donc B′ et C′ sont symétriques autour de l'axe des abscisses et donc sans calcul, $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2

Partie A : Soit u la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. La fonction u est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x strictement positif, $u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. Pour tout réel x strictement positif, $u'(x) > 0$ comme somme de termes positifs (dont l'un est non nul), la fonction u est donc strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0}(x^2 - 2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}u(x) = -\infty$.

2. a) La fonction u est continue sur $]0\ ;+\infty[$, elle prend des valeurs positives (car $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x) = +\infty$) et des valeurs négatives (car $\lim\limits_{x\to0}u(x) = -\infty$), selon le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u s'annule au moins une fois. Comme de plus, la fonction est strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois. Donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;+\infty[$. On note α cette solution.

b) À l'aide de la calculatrice on remarque que $u(1,31) < 0 < u(1,32)$ donc $1,31 < \alpha < 1,32$

3. Puisque u est croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tout $x \in]0\,;\alpha[$, $u(x) < u(\alpha)$ donc
$u(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$ donc $u(x) > 0$

4. $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B : On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

1. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x + 2\times(2-\ln x)\times \dfrac{-1}{x} = \dfrac{2}{x}(x^2 - 2 + \ln x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.

$\dfrac{2}{x}$ étant toujours positif sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, donc est strictement négative sur $]0\,;\alpha[$, et strictement positive sur $]\alpha\,;+\infty[$ et s'annule en α. La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ et atteint un minimum en α.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x))^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}(2-\ln(x))^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1. Le point A a pour coordonnées $(0\,;2)$ et le point $M(x\,;\ln x)$, donc $AM^2 = (x-0)^2 + (\ln x - 2)^2 = f(x)$

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

a) La fonction étant strictement croissante sur son ensemble de définition, et la fonction f prenant des valeurs toujours positives, les fonctions f et $g = \sqrt{f}$ ont même sens de variation.

b) La fonction g atteint donc son minimum en α. La distance AM est donc minimale pour $x = \alpha$ soit au point $P(\alpha\,;\ln\alpha)$. Or $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ donc P a pour coordonnées $(\alpha\,;2-\alpha^2)$.

c) $AP^2 = (\alpha-0)^2 + (2-\alpha^2-2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4$, donc $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ (car $\alpha > 0$).

3. La tangente à Γ en P a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et la droite AP a pour coefficient directeur $\dfrac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \dfrac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0} = -\alpha$. Le produit des deux coefficients directeurs donne -1, la tangente Γ en P et la droite (AP) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3

1. Proposition 1 : Vraie : Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, donc

$t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$. En écrivant cette égalité pour $n = 0, 1, \ldots, n$, on obtient :

$t_1 = 0 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$

$t_2 = t_1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$

$\ldots = \ldots$

$t_n = t_{n-1} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, soit par somme membres à membres et simplifications :

$t_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

2. Proposition 2 : Vraie : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles convergent et ont la même limite.
Comme $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (w_n) converge vers la même limite.

3. Proposition 3 : Vrai : $x_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) = \ln(n+1) - \ln(n+2)$; alors

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k = \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + \ldots + \ln(n) - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 - \ln(n+2)$;

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+2) = +\infty$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

EXERCICE 4

Partie A : un modèle discret

1. a) On a $f(x) = 2x - \dfrac{x^2}{10}$, , donc $f'(x) = 2 - \dfrac{x}{5}$. On a $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 10$ et $f'(x) < 0 \iff x > 10$. La fonction f est donc croissante sur [0 ; 10] et décroissante sur [10 ; 20].

b) Sur [0 ; 20], le maximum de f est donc $f(10) = 10$, $f(0) = 0$ et $f(20) = 0$ sont les minimums de f .

On a donc quel que soit $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

c) Voir ci-dessous.

2. Initialisation : On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0{,}1 = 1{,}9$; On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.

Hérédité : Supposons qu'il existe une valeur n pour laquelle $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

On a vu que sur l'intervalle [0 ; 10], le fonction f est croissante, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$ entraîne $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. De plus d'après la question 1. b. quel que soit un nombre dans l'intervalle [0 ; 20] et a fortiori dans l'intervalle [0 ; 10], son image par f et elle aussi dans l'intervalle [0 ; 10].

On a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$. La démonstration par récurrence est terminée.

3. On vient en fait de démontrer que la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par 10, elle converge vers une limite l inférieure ou égale à 10.

Comme la fonction f est continue on obtient par passage à la limite :

$l = 2l - \dfrac{l^2}{10} \iff 10l - l^2 = 0 \iff l(10 - l) = 0 \iff l = 0$ ou $l = 10$.

$l = 0$ n'est pas possible car $u_0 = 1$ et la suite est croissante. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Partie B : un modèle continu

1. a) $z = \dfrac{1}{y} \iff y = \dfrac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = \dfrac{-y'}{y^2} = \dfrac{-y(10-y)}{20y^2} = \dfrac{-10y+y^2}{20y^2} = \dfrac{-1}{2y} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{-z}{2} + \dfrac{1}{20}$

b. Une solution constante évidente de (E_1) est $z = \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions $z(x) = K\, e^{\frac{-1}{2}x} + \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $y(x) = \dfrac{1}{K e^{\frac{-1}{2}x} + \frac{1}{10}}$.

2. g est une solution de (E) telle que $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{K e^{\frac{0}{2}} + \frac{1}{10}} = 1 \iff \dfrac{1}{K + 0{,}1} = 1 \iff$

$1 = K + 0{,}1 \iff K = 0{,}9$. .

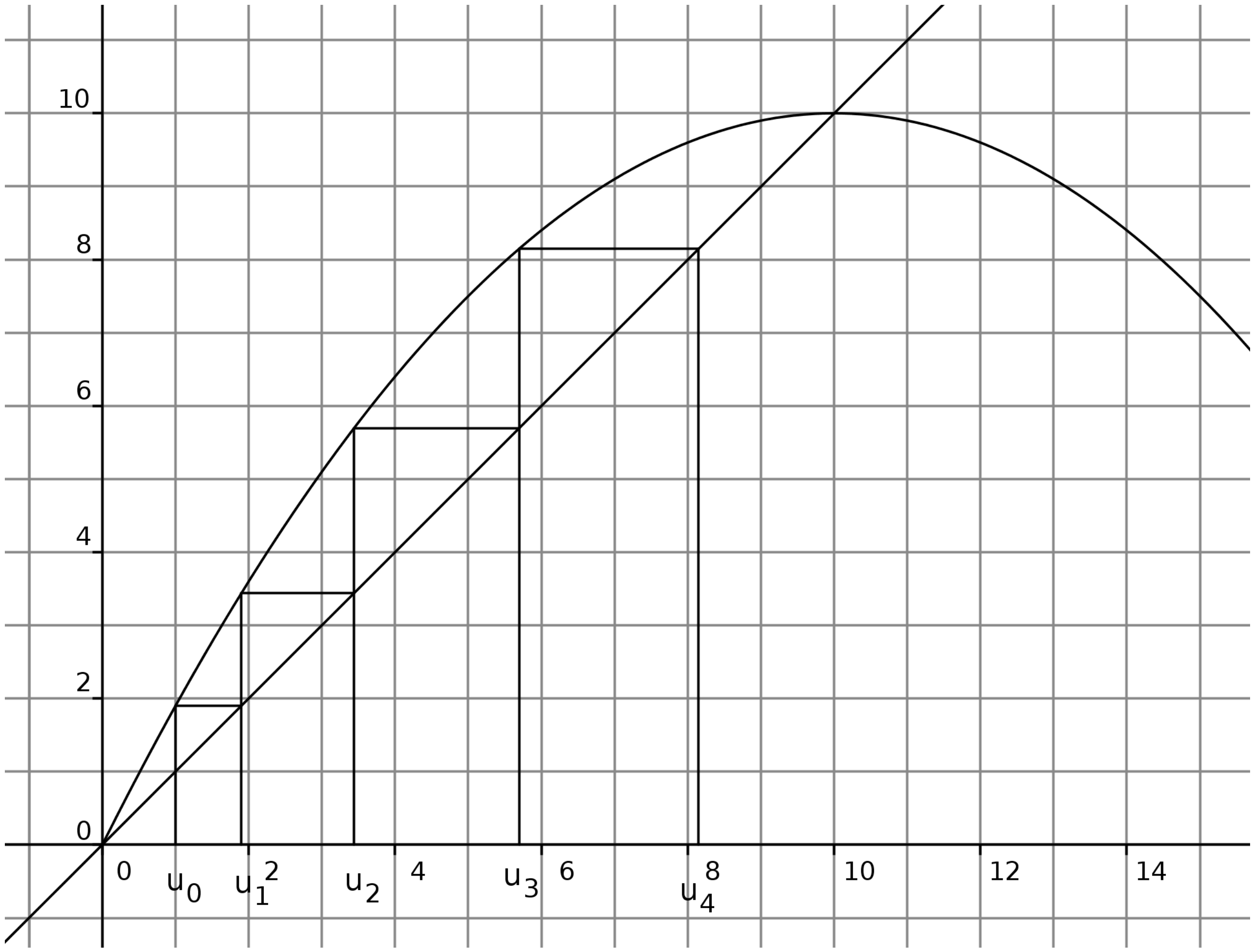
Finalement $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10} e^{\frac{-1}{2}x} + \frac{1}{10}} = \dfrac{10}{9 e^{\frac{-1}{2}x} + 1}$.

3. On a $g'(x) = \dfrac{-10 \times 9 \times (\frac{-1}{2}) e^{\frac{-1}{2}x}}{(9 e^{\frac{-1}{2}x} + 1)^2} = \dfrac{45 e^{\frac{-1}{2}x}}{(9 e^{\frac{-1}{2}x} + 1)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1}{2}x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 10$. Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

5. Il faut résoudre l'inéquation $g(x) > 5 \iff \dfrac{10}{9 e^{\frac{-1}{2}x} + 1} > 5 \iff 9 e^{\frac{-1}{2}x} + 1 < 2 \iff 9 e^{\frac{-1}{2}x} < 1 \iff e^{\frac{-1}{2}x} < \dfrac{1}{9}$

$\iff \dfrac{-1}{2}x < \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) \iff x > 2\ln 9$ soit environ 4,3 ans ou en 5 ans à 1 an près soit en 2010.



10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4