DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 TERMINALE S 2 *Mercredi 16 février 2011*

EXERCICE 1 (5 points)

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. a. Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.

b. Déterminer l'affixe z_F du point F.

c. Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

EXERCICE 2 (4 points)

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Deux sites de vente, un français et un allemand présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise le site français est égale à deux fois celle qu'il utilise le site allemand. (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

1. Calculer les probabilités P(F), P(A).

2. Sur chacun des sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$P_F(S) = 0{,}2$; $P_A(S) = 0{,}5$.

a) Construire un arbre de probabilités.

b) Déterminer $P(S \cap A)$.

c) Calculer p(S).

d) L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site allemand.

EXERCICE 3 (7 points)

A. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + e^x \times y^2 = 0$.

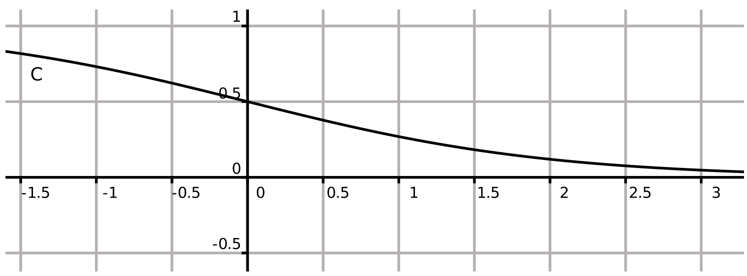
On admet que les solutions de cette équation sont des fonctions strictement positives.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par $z = \dfrac{1}{y}$.

2. En déduire les fonctions z, puis les solutions de l'équation (E).

3. Trouver la fonction g solution de (E) et telle que $g(0) = \dfrac{1}{2}$.

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, C sa courbe représentative donnée ci-dessous et pour tout réel a, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$.



1. Montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. En déduire l'expression de $I(a)$ en fonction de a.

3. Déterminer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

4. Interpréter graphiquement le nombre $I(a)$ et hachurer sur le graphique $I(2)$.

EXERCICE 4 (4 points)

On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$ et $J = \displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

Calculer I et J.