Exercice 1 : Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_A = 1 + \mathrm{i}$ , $z_B = -1 + \mathrm{i}$ , $z_C = -1 - \mathrm{i}$ ,$z_D = 1 - \mathrm{i}$ .

Soit $r$ la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

1. L'écriture complexe de la rotation $r$ est $z' - z_C = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$.

2. a. L'affixe de E est donné par $z_E - (-1 - \mathrm{i}) = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_B - (-1 - \mathrm{i})) = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(-1 + \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i})$, soit

$z_E = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(2\mathrm{i}) - 1 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i} + \sqrt{3} - 1 + \mathrm{i} = -1 + \sqrt{3}$.

b. L'affixe de F est donné par $z_F - (-1 - \mathrm{i}) = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_D - (-1 - \mathrm{i})) = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(1 - \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i})$, soit

$z_E = (\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})(2) - 1 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}(-1 - \sqrt{3})$.

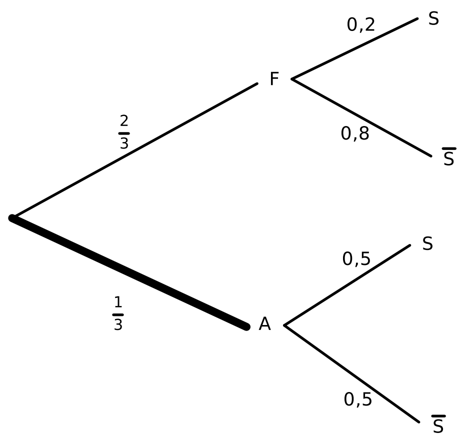
c. Le quotient $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1 + \mathrm{i} + 1 - \sqrt{3}}{1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})} = \frac{(2 - \sqrt{3} + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}(2 + \sqrt{3}))}{(1 + \mathrm{i}(2 + \sqrt{3})(1 - \mathrm{i}(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} - \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) + \mathrm{i} + 2 + \sqrt{3}}{1 + (2 + \sqrt{3})^2} =$

$\frac{4}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ qui est un réel strictement positif.

d. On sait que $\arg(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}) = (\overrightarrow{\mathrm{FA}};\overrightarrow{\mathrm{EA}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AF}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}) = 0\ [2\pi]$ d'après la question précédente. Donc les points A, E et F sont alignés.

Exercice 2 : Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Deux sites de vente, un français et un allemand présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise le site français est égale à deux fois celle qu'il utilise le site allemand. (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays »).

1. On a alors p(A) + p(F) = 1 et p(F) = 2p(A), d'où p(F) = $\frac{2}{3}$ et p(A) = $\frac{1}{3}$.




2. a. D'où l'arbre de probabilités :

b. $p(S \cap A) = p_A(S) \times p(A) = 0{,}5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

c. On utilise la formule des probabilités totales avec la partition A et F :

$p(S) = p(S \cap A) + p(S \cap F) = p_A(S) \times p(A) + p_F(S) \times p(F) = \frac{1}{6} + 0{,}2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{9}{30} = 0,3$.

d. On demande $p_S(A) = \frac{p(S \cap A)}{p(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{0,3} = \frac{1}{6} \times \frac{10}{3} = \frac{5}{9}$.

Exercice 3 : A. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + e^x y^2 = 0$. On admet que les solutions de cette équation sont des fonctions strictement positives.

Si $z = \frac{1}{y}$ alors $z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{e^x y^2}{y^2} = e^x$, donc $z = e^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Ainsi $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^x + k}$.

La fonction $g$ vérifie $g(0) = \frac{1}{2}$, donc $g(0) = \frac{1}{e^0 + k} = \frac{1}{1 + k}$, donc $k = 1$, et $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

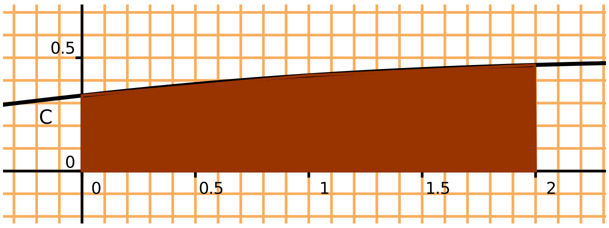
B. On a $1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} = f(x)$.

On en déduit $\mathrm{I}(a) = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a (1 - \frac{e^t}{1 + e^t})\mathrm{d}t = [t - \ln(1 + e^t)]_0^a = a - \ln(1 + e^a) + \ln 2 = \ln(\frac{2e^a}{1 + e^a})$.

Comme $\lim\limits_{a \to +\infty} e^a = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+x} = 2$, alors $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a) = \ln 2$.

Puisque la fonction $f$ est strictement positive sur $[0;\, a]$, le nombre $I(a)$ est égale à l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

Le nombre I(2) sur le graphique :




Exercice 4 : Une primitive de $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{2} + \ln x$ ,

donc I $= \int_1^2 (x + \frac{1}{x})\,dx = [\frac{x^2}{2} + \ln x]_1{}^2 = \frac{2^2}{2} + \ln 2 - (\frac{1^2}{2} + \ln 1) = \frac{3}{2} + \ln 2.$

Une primitive de $x \longmapsto x^2 - \frac{1}{x^2}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$ ,

donc J $= \int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})\,dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}]_1{}^2 = \frac{2^3}{3} + \frac{1}{2} - (\frac{1^3}{3} + \frac{1}{1}) = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}.$