Lycée F. MISTRAL. **TS** 2 avril 2011

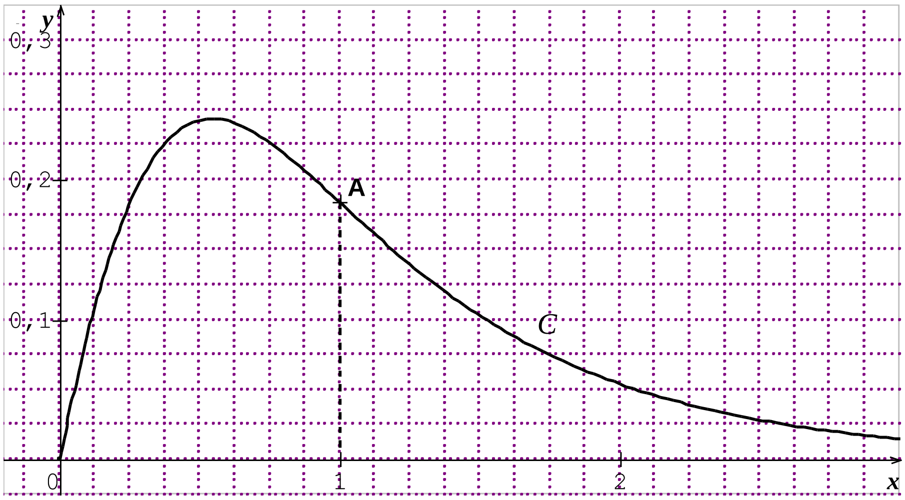
DEVOIR SURVEILLE COMMUN n°7.

EXERCICE 1(commun à tous les élèves) (Bac Polynésie juin 2009) 6 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;+\infty[$. La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $A\left(1\,;\ \dfrac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0\,;1]$, elle est au dessus du segment [OA].



1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. **a)** Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

b) En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2(commun à tous les élèves) (Bac Amérique du Sud novembre 2010) 5 points

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a < b$

- si pour tout $x \in [a\,;b]$ $u(x) > 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- $\displaystyle\int_a^b \left[u(x)+v(x)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b k.u(x)\,\mathrm{d}x = k.\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où k est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a < b et si pour tout x de $[a\,;b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x$.

1. **a)** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

b) Calculer $\varphi(e)$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;e]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c) Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$. On note f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x > 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Déduire de la question **1.** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

c) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;+\infty[$ on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x^2}$.

d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm² du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 3 <u>**(commun à tous les élèves)**</u> (Bac Nouvelle Calédonie novembre 2010) **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

1. a) Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.

b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. a) Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC .

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

a) Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.

b) Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

c) Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

d) Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que : $|z| = |z + \sqrt{3} + i|$.

b) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 4 <u>**(commun à tous les élèves)**</u> (Bac Nouvelle Calédonie novembre 2009) **5 points**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8. Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis. Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

– T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n^{\text{-ième}}$ passage. »
– P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n^{\text{-ième}}$ passage. »

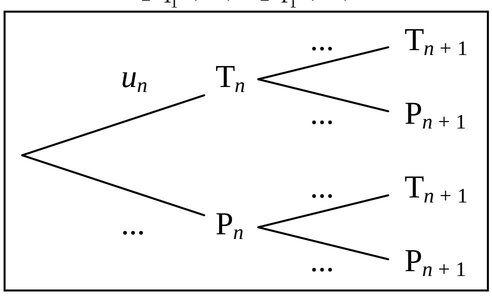
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$u_n = p(T_n) \text{ où } p(T_n) \text{ est la probabilité de l'évènement } T_n.$$

1. a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$ $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

b) Montrer que $p(T_2) = 0{,}25$.

c) <u>Recopier</u> et compléter l'arbre ci-contre :



d) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$v_n = u_n - \dfrac{2}{9}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,1. Préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. e)** ?