Exercice 1

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0~;~1]$ est intégrable sur cet intervalle et
$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2\mathrm{e}} - 0 = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$
2. On sait que sur $[0~;~1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus du segment [OA] ; l'intégrale de f sur $[0~;~1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathcal{C})$ et les droites $y=0, x=0$ et $x=1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec I(1 ; 0)). Cette aire est égale à $\frac{\mathrm{OI}\times\mathrm{IA}}{2} = \frac{1\times\frac{1}{2\mathrm{e}}}{2} = \frac{1}{4\mathrm{e}}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. g fonction polynôme est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

   Or $3x^2+2x+1 = 3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)+1 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > \frac{2}{3} > 0$.

   Conclusion $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

   On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. Comme la fonction est croissante sur $[0~;~1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0~;~1]$, donc sur $[0;+\infty[$.

3.
   a. f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u = x\mathrm{e}^{-x}$ et $v = x^2+1$. De $u' = \mathrm{e}^{-x}(1-x), v' = 2x$ et $f' = \frac{u'v - \mathrm{uv}'}{v^2}$, on en déduit que $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(1-x)(x^2+1) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x}{(x^2+1)^2}$ qui est du signe du numérateur donc de

   $\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1-x^3-x-2x^2\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^3-x^2-x+1\right)$ ou encore de $-x^3-x^2-x+1 = -\left(x^3+x^2+x-1\right) = -g(x)$; f' et g ont donc des signes contraires.

   b. On a vu que sur $[0;\alpha], g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0;\alpha]$ et sur $[\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

4.
   a. Il est évident que quel que soit $x \in [0;+\infty[, (x-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+1-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b. On a $x \geqslant 0 \Leftrightarrow -x \leqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2+1}$.

   En posant $u(x) = x^2+1, u$ est dérivable et $u'(x) = 2x$. Donc $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

   On a donc $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. (d'après la question **4. a.**)

   Or $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-n}\right]$. Conclusion $u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

   c. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$, on en déduit par application du théorème des gendarmes :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 2

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

PARTIE B :

1.

a. f somme de fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$\varphi'(x)=2x-4x\ln x-2x^2\times\frac{1}{x}=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$.
Comme $x\geqslant 1\Rightarrow \ln x\geqslant 0$, il en résulte que sur $[1;+\infty[$, $\varphi'(x)\leqslant 0$: φ est donc décroissante sur $[1;+\infty[$.

b. $\varphi(\mathrm{e})=1+\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2\times\ln\mathrm{e}=1-\mathrm{e}^2\approx-6,4$. D'autre part $\varphi(1)=1+1-2\times 0=2$.
La fonction est décroissante sur $[1;\mathrm{e}]$, $\varphi(\mathrm{e})<0$ et $\varphi(1)>0$, donc la fonction φ continue car dérivable s'annule une seule fois en $\alpha\in[0;1]$.
La calculatrice donne : $\varphi(1,8)\approx 0,4$; $\varphi(1,9)\approx-0,02$, donc : $1,8<\alpha<1,9$.

c. La variation de φ montre que : sur $[1;\alpha[$, $\varphi(x)>0$; $\varphi(\alpha)=0$; sur $]\alpha;+\infty[$, $\varphi(x)<0$.

2.

a. Le dénominateur ne peut s'annuler, donc f quotient de fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}=\frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b. De la question 1. c. on déduit que :
- sur $[1;\mathrm{e}[$, $f'(x)>0$: la fonction est croissante sur cet intervalle ;
- $f'(\alpha)=0$;
- sur $]\alpha;+\infty[$, $f'(x)<0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle.

c. On a $x^2<x^2+1\Leftrightarrow\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}$ et en multipliant par $\ln x\geqslant 0$, car $x\geqslant 1$, on obtient :
$\frac{\ln x}{1+x^2}\leqslant\frac{\ln x}{x^2}$, soit $f(x)\leqslant\frac{\ln x}{x^2}$.
De plus sur $[1;+\infty[$, $\ln x\geqslant 0$ et $1+x^2>1>0$, donc $f(x)\geqslant 0$.
Finalement : pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ on a : $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln x}{x^2}$.

d. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$, donc d'après le théorème des gendarmes l'encadrement précédent montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3.

a. Posons :
$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$, on peut intégrer par parties :
$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\ln x\times\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}=-\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(\frac{\ln 1}{1}-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

b. Puisque l'unité d'aire est égale à 1 cm^2, on sait que l'intégrale précédente est égale à $\mathcal{A}$.
On a vu que $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln x}{x^2}$, donc d'après la restitution organisée de connaissances de la partie A, on a $0\leqslant\mathcal{A}\leqslant 1-\frac{1}{\mathrm{e}}$ (soit à peu près $0<\mathcal{A}\leqslant 0,265$.

Exercice 3

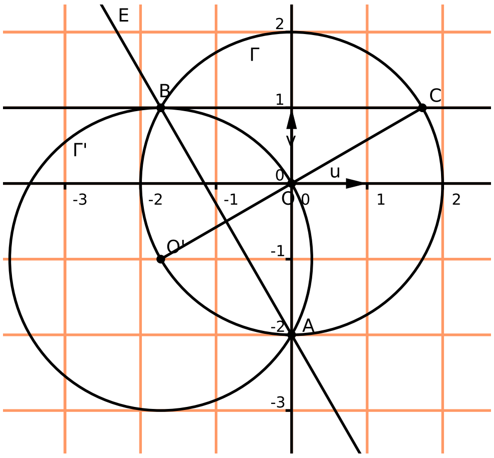
1.

a. $z_{\mathrm{A}}=-2\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. $z_{\mathrm{B}}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ donc $|z_{\mathrm{B}}|^2=3+1=4=2\Rightarrow|z_{\mathrm{B}}|=2$.
On peut donc écrire $z_{\mathrm{B}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

On a de même $|z_C| = 2$, d'où $z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. z_A, z_B et z_C ont pour module 2, soit OA = OB = OC= 2, ce qui signifie que A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

c.



2.

a. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{3} + 3\mathrm{i}}{\sqrt{3} + 3\mathrm{i}} = \frac{(-\sqrt{3} + 3\mathrm{i})(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})}{(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})} = \frac{-3 + 6\mathrm{i}\sqrt{3} + 9}{3 + 9} = \frac{6 + 6\sqrt{3}\mathrm{i}}{12} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. Le résultat précédent peut s'écrire : $z_B - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$: cette égalité signifie que B est l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est isocèle en A d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$; tous ses angles sont donc égaux et le triangle (ABC) est équilatéral (indirect).

3.

a. Si M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' par r, on a : $z' - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$.

En particulier si O d'affixe 0 a pour image O′ d'affixe $z_{O'}$, alors : $z_{O'} + 2\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(0 + 2\mathrm{i})$ ou encore $z_{O'} = -2\mathrm{i} + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (2\mathrm{i}) = -2\mathrm{i} + \mathrm{i} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

b. On a $z_{O'} + z_C = 0$, ce qui signifie que O est le milieu de [CO′] qui est un diamètre de Γ.

c. L'image de Γ a pour centre l'image de O, soit O′ et pour rayon 2. On trace donc le cercle Γ' de centre O′ et de rayon O′O.

d. Le point A appartient à Γ ; c'est le centre de la rotation r ; il est donc invariant et appartient donc à Γ'. De même le point C appartient à Γ ; son image par r est B qui appartient donc à Γ'.

Les cercles Γ et Γ' ont en commun les points A et B.

4.

a.

$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|$ peut s'écrire $|z| = \left|z - \left(-\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)\right|$ ce qui signifie géométriquement que

$\mathrm{O}M = \mathrm{O}'M \Leftrightarrow M$ est équidistant de O et de O′, c'est-à-dire que M appartient à la médiatrice du segment [OO′] qui est donc l'ensemble (E).

b. Par définition de la rotation r, on a AO = AO′, donc A appartient à (E).

On vient de voir que B appartient au cercle Γ' de rayon 2, donc O′B = 2 = OB. B est donc lui aussi équidistant de O et de O′ : il appartient à (E).

Exercice 4

1.

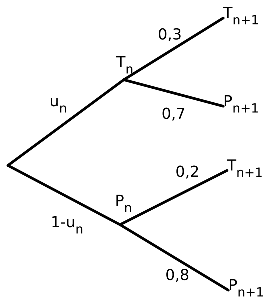
a. T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.

D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongeoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$. Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

b. D'après le principe des probabilités totales :

$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \frac{1}{4}$.

c. L'arbre de probabilités :



d. Toujours d'après le principe des probabilités totales :

$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2$.

e. La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.

Il semble que u_n ait pour limite $0,222....$

2.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{10}$; son premier terme est $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} \times \frac{5}{18}$.

b. On sait que $v_n = v_1\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$. Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on a $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

c. Comme $0 < \frac{1}{10} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

Or $\frac{2}{9} = 0,222...$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.